



Seitsemäntoista tapettiryhmää

Jari Haavisto

23.1.2019

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Jari Haavisto			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Seitsemäntoista tapettiryhmää			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Matematiikka			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma		Tammikuu 2019	52 s.
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Tapettikuviot ovat kaksiulotteisia kuvioita, joissa tietty osa kuviosta toistuu äärettömän monesti kahdessa suunnassa. Tällaisille kuvioille on ominaista, että tietynlaiset kuvaukset säilyttävät kuvion muuttumattomina. Esimerkiksi tämän tutkielman kansikuvan kuviota voidaan kääntää kolmasosa-kierros ilman, että katsoja huomaa kuvassa muutosta. Kaikkien niiden kuvausten joukkoa, jotka säilyttävät tapettikuvion muuttumattomana, kutsutaan kyseisen kuvion tapettiryhmäksi. Tässä työssä näytetään, että vaikka tapettikuvioita on rajattomasti, on erilaisia tapettiryhmiä ainoastaan seitsemäntoista erilaista.</p> <p>Tulos ei ole uusi, sillä matemaatikot Fedorov, Schenflies ja Barlow määrittivät jo 1800-luvun lopulla paitsi kaksiulotteisten tapettiryhmien määrän, myös kolmiulotteisten kristallografisten ryhmien määrän. Tässä työssä todistus etenee kuitenkin eri tavalla ja työn tarkoituksena onkin päästä samaan tulokseen käyttäen ryhmäteorian työkaluja pidättäytyen pelkästään kaksiulotteisessa tapauksessa.</p> <p>Tapettikuvion toistumista kahdessa suunnassa kuvaa sen siirtohila. Tutkittaessa tapettikuviota geometrisesti nähdään, että tapettikuviot voidaan jakaa siirtohilansa perusteella viiteen joukkoon. Hilan tyyppi rajoittaa sitä, minkälaisia kuvauksia tapettikuvion tapettiryhmään voi kuulua. Jatka-malla tarkastelua systemaattisesti tapaus kerrallaan nähdään, että mahdollisia tapettiryhmiä on (isomorfi-aa vailla) seitsemäntoista erilaista.</p> <p>Tutkielmassa käydään ensin läpi tapettiryhmien tutkimuksessa tarvittavaa taustatietoa ryhmäteoria-asta sekä aputuloksia, joita varsinaisessa todistuksessa tarvitaan. Tämän jälkeen luvussa kolme määritellään peruskäsitteet, kuten itse tapettikuvio, sen tapettiryhmä, symmetriaryhmä ja siirto-hila. Luvussa neljä näytetään, että jokaisen tapettikuvion tapettiryhmä on yksi seitsemästätoista tapettiryhmästä. Samalla esitellään ja nimetään ryhmät. Viimeisessä luvussa todistetaan, että mit-kään näistä seitsemästätoista tapettiryhmästä eivät ole isomorfisia keskenään.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Algebra, Ryhmäteoria, Tapettiryhmät			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Isometriat	4
2.1	Avaruuden \mathbb{R}^n isometriat	4
2.2	Avaruuden \mathbb{R}^2 isometriat	8
3	Hilat ja pisteryhmät	16
4	Tapettiryhmät	27
5	Uniikit tapettiryhmät	47

Luku 1

Johdanto

Tapettikuviot ovat kaksiulotteisia kuvioita, joissa tietty osa kuvioista toistuu äärettömän monesti kahdessa suunnassa. Tällaisille kuvioille on ominaista, että tietynlaiset kuvaukset säilyttävät kuvion muuttumattomina. Esimerkiksi tämän tutkielman kansikuvan kuviota voidaan kääntää kolmasosakierros ilman, että katsoja huomaa kuvassa muutosta. Kaikkien niiden kuvausten joukkoa, jotka säilyttävät tapettikuvion muuttumattomana, kutsutaan kyseisen kuvion tapettiryhmäksi. Jokaisella tapettikuvioilla on siis oma tapettiryhmänsä. On ilmeistä, että tapettikuvioita on äärettömästi, mutta kenties hieman yllättävästi tapettiryhmiä on ainoastaan seitsemäntoista kappaletta.

Symmetrioissa yhdistyvät estetiikka ja matematiikka kiehtovalla tavalla ja niitä onkin sekä tutkittu että käytetty antiikin ajoista lähtien. Jo Arkhimedes oli kiinnostunut symmetrisistä kolmiulotteisista kappaleista ja tapettikuviot ovat olleet yleisesti käytössä koriste kuvioina kautta ihmiskunnan historian. Todennäköisesti tunnetuin yksittäinen kohde, jossa tapettikuviot ovat merkittävä osa arkkitehtuuria, on Alhambran palatsi Granadassa, Espanjassa. Se on tapettikuvioiden kannalta merkityksellinen, sillä palatsin koristelussa käytetyissä kuvioissa esiintyvät kaikki seitsemäntoista erilaista tapettiryhmää. Palatsi toimi merkittävänä innoittajana esimerkiksi M. C. Escherille (1898-1972), joka vieraillessaan siellä vuonna 1922 inspiroitui tessellaatioiden matematiikasta. Escher on tunnettu matemaattisista taideteoksistaan, joissa usein esiintyy tapettikuvioita joko puhtaassa muodossaan tai jonkinlaisina variaatioina. Arkisempiakin esimerkkejä tapettikuvioista löytyy esimerkiksi katsomalla tiiliseinän toistuva kuviointia tai kylpyhuoneen lattian laatoitusta. Kaikilla tapettikuvioilla on kuitenkin yhteiset piirteensä ja ne kaikki voidaan luokitella niiden tapettiryhmän mukaan.

Tässä tutkielmassa osoitetaan, että tapettiryhmiä on tasan seitsemäntoista erilaista. Tulos ryhmien lukumäärästä ei ole uusi, sillä sen on todistanut ensimmäistä kertaa venäläinen matemaatikko Evgraf Fedorov (1853-1919) vuonna 1891 kirjassaan *Simmetriya pravil'nykh sistem figur*. Kirjassa todistetaan tapettiryhmien lukumäärän lisäksi, että kol-

miulotteisia kristallografisia ryhmiä on 230 erilaista. Fedorovin kanssa yhteistyötä tehnyt saksalainen matemaatikko Arthur Moritz Schoenflies (1853-1928) julkaisi vastaavan tuloksen kirjassaan *Kristallsysteme und Kristallstruktur*. Tämän jälkeen samainen tulos on todistettu useammallakin eri menetelmällä. Suuri osa todistuksista on kuitenkin melko haastavia ja useissa tarvitaan pohjatietoja, joiden saavuttaminen maisteritason koulutuksessa on vaikeaa. Tässä työssä olen pyrkinyt yksinkertaiseen todistukseen, joka pitäytyy kaksiulotteisessa tapauksessa ja käyttää ainoastaan ryhmäteorian työkaluja.

Tutkielmassa käydään ensin läpi tapettiryhmien tutkimuksessa tarvittavaa taustatietoa ryhmäteoriasta sekä aputuloksia, joita varsinaisessa todistuksessa tarvitaan (Luku 2). Tapettiryhmiin liittyvä työ aloitetaan määrittemällä peruskäsitteet, kuten itse tapettikuvio, sen tapettiryhmä, symmetriaryhmä ja siirtohila (Luku 3). Tämän jälkeen näytetään, että jokaisen tapettikuvion tapettiryhmä on yksi seitsemästatoista tapettiryhmästä (Luku 4). Samalla esitellään ja nimetään ryhmät. Viimeisessä luvussa (Luku 5) todistetaan, että mitkään näistä seitsemästatoista tapettiryhmästä eivät ole isomorfisia keskenään.

Luku 2

Isometriat

Tapettikuvioden perustavanlaatuinen ominaisuus on, että jotkin kuvaukset säilyttävät kuvion muuttumattomana. Tämä kuvion muuttumattomuus voidaan ilmaista täsmällisemmin sanomalla, että kuvion kaikkien pisteiden väliset etäisyydet säilyvät muuttumattomana. Tässä luvussa määrittelemme täsmällisesti isometriat, eli etäisyydet säilyttävät kuvaukset, jotka tulevat olemaan tapettiryhmien tutkimuksen perustana. Näemme myös, minkälaisia isometriat ovat tapettiryhmille relevantissa kaksiulotteisessa tapauksessa ja kuinka mielivaltaiset isometriset kuvaukset saadaan jaettua helposti hahmotettaviin komponentteihin.

2.1 Avaruuden \mathbb{R}^n isometriat

Vaikka tapettikuviot ovatkin kaksiulotteisia, määrittelemme isometriat yleisemmin metrisissä avaruuksissa ja todistamme joitakin niihin liittyviä tarpeellisia tuloksia n -ulotteisen avaruuden tapauksessa. Luvun sisältö syventää Morandin [2] ensimmäisen luvun tuloksia. Seuraavassa luvussa siirrymme tarkastelemaan kaksiulotteisen tapauksen erityispiirteitä.

Määritelmä 2.1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia varustettuna metriikoilla d_X ja d_Y . Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on *isometria*, jos jokaiselle $a, b \in X$ pätee

$$d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b)).$$

Rajoitutaan tutkimaan n -ulotteisia metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on isometria, jos $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Merkitään avaruuden \mathbb{R}^n kaikkien isometrioiden joukkoa $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Varustetaan isometrioiden joukko luonnollisella laskutoimituksella, eli kuvausten yhdistämisellä, jolloin havaitaan, että $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ on ryhmä. Todistus esitetään tämän luvun lopussa.

Olkoon $v \in \mathbb{R}^n$ ja $t_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kuvaus ehdolla $t_v(x) = x + v$. Tällöin kuvaus t_v on *siirto*. Siirrot ovat aina isometrioita, sillä $|t_v(x) - t_v(y)| = |x + v - y - v| = |x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Liitetään kaikkien avaruuden \mathbb{R}^n siirtojen joukkoon laskutoimitukseksi kuvausten yhdistäminen, joka on liitännäinen operaatio. Havaitaan, että tällöin joukko on suljettu laskutoimituksen suhteen. Joukkoon kuuluu identtinen kuvaus, joka toimii laskutoimituksen neutraalialkiona. Lisäksi mille tahansa joukon alkioille t_v löytyy joukosta käänteisalkio t_{-v} . Täten avaruuden \mathbb{R}^n siirrot muodostavat ryhmän, joka on isometriaryhmän aliryhmä.

Koska jokaista avaruuden \mathbb{R}^n vektoria v vastaa yksi siirto $t_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja jokaista siirtoa $t_w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vastaa yksi avaruuden \mathbb{R}^n vektori w , voimme samaistaa siirron t_v vektorin v kanssa.

Muita isometrioita ovat esimerkiksi kierrot ja peilaukset. Kierto pisteen ympäri on isometria, joka kiinnittää yhden (ja vain yhden) pisteen.

Toisin kuin siirrot, jotka kuvaavat jokaisen pisteen jollekin muulle pisteelle, kierrot ja peilaukset säilyttävät yhden (kiertokeskus) tai useamman (peilausakseli) pisteen muuttumattomana. Mikäli isometria säilyttää origon muuttumattomana, sillä on kiinnostavia ominaisuuksia. Koska kuvauksen toiminta ei riipu käytettävästä koordinaatistosta, voimme tapettikuvioita tutkiessamme valita origon vapaasti.

Lemma 2.2. *Oletetaan, että f on isometria, jolle pätee $f(0) = 0$. Tällöin f säilyttää kulmat, pistetulot ja kaikkien vektorien pituudet.*

Todistus. Olkoon $z \in \mathbb{R}^2$. Kuvaus f on isometria ja se säilyttää nollavektorin, joten $|z| = |z - 0| = |f(z) - f(0)| = |f(z)|$. Täten kuvaus f säilyttää vektorien pituudet.

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$. Merkitään $f(x) = x'$ ja $f(y) = y'$. Tällöin

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$$

ja

$$|x' - y'|^2 = |x'|^2 + |y'|^2 - 2|x'||y'|\cos\theta',$$

jossa θ on vektorien x ja y välinen kulma ja θ' on vektorien x' ja y' välinen kulma. Edellä nähtiin, että f säilyttää vektorien pituudet, joten $|x| = |x'|$ ja $|y| = |y'|$. Lisäksi isometrian määritelmän mukaan $|x - y| = |x' - y'|$, joten $\cos\theta = \cos\theta'$. Koska kyseessä on kahden vektorin välinen kulma, $0 \leq \theta < \pi$ ja $0 \leq \theta' < \pi$, joten $\theta = \theta'$. Täten f säilyttää kulmat. Pistetulon määritelmän mukaan $x \cdot y = |x||y|\cos\theta$, joten $x' \cdot y' = |x'||y'|\cos\theta' = |x||y|\cos\theta = x \cdot y$. Täten f säilyttää myös pistetulot. \square

Lause 2.3. *Oletetaan, että f on isometria. Tällöin f on lineaarikuvaus, jos ja vain jos $f(0) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että $f(0) = 0$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ jokin avaruuden \mathbb{R}^n ortonormaali kanta, esimerkiksi luonnollinen kanta. Merkitään $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ ja $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$, missä $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Merkitään lisäksi $f(u_i) = v_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lemman 2.2 mukaan f säilyttää vektorien pituudet. Täten $|v_i| = |f(u_i)| = |u_i| = 1$ kaikilla i . Koska lemmän 2.2 mukaan f säilyttää myös vektorien väliset kulmat, myös $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ on ortonormaali kanta. Muistetaan, että mikä tahansa vektori $z \in \mathbb{R}^2$ voidaan kirjoittaa ortonormaalin kannan \mathcal{V} suhteen muodossa $\sum_i (z \cdot v_i) v_i$. Lisäksi lemmän 2.2 mukaan f säilyttää pistetulot, joten

$$f(x) = \sum_i (f(x) \cdot v_i) v_i = \sum_i (f(x) \cdot f(u_i)) v_i = \sum_i (x \cdot u_i) v_i$$

ja vastaavasti $f(y) = \sum_i (y \cdot u_i) v_i$. Niinpä kuvaukselle f pätee

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \sum_i (x \cdot u_i) v_i + \sum_i (y \cdot u_i) v_i = \sum_i ((x \cdot u_i) + (y \cdot u_i)) v_i \\ &= \sum_i ((x + y) \cdot u_i) v_i = \sum_i (f(x + y) \cdot f(u_i)) v_i = \sum_i (f(x + y) \cdot v_i) v_i \\ &= f(x + y). \end{aligned}$$

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$, jolloin käyttämällä jälleen lemmää 2.2 nähdään, että

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \sum_i (f(\alpha x) \cdot v_i) v_i = \sum_i (f(\alpha x) \cdot f(u_i)) v_i = \sum_i (\alpha x \cdot u_i) v_i \\ &= \alpha \sum_i (x \cdot u_i) v_i = \alpha \sum_i (f(x) \cdot v_i) v_i \\ &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

Täten f on lineaarikuvaus.

Oletetaan sitten, että $f(0) = b \neq 0$. Olkoon $a = (1, 0, \dots, 0)$. Tällöin nähdään, että $f(0 + a) = f(a) \neq b + f(a) = f(0) + f(a)$, joten f ei ole lineaarikuvaus. \square

Isometrioiden lisäksi meille tärkeitä kuvauksia ovat ortogonaaliset kuvaukset ja niitä kuvaavat matriisit. Tämän työn tarpeisiin riittää allaoleva ortogonaalisten matriisien ryhmän määritelmä, mutta taustaa ja syvempää tietoa lineaarisista ja ortogonaalisista matriisiryhmistä löytyy esimerkiksi Bakerin [3] luvusta 1.

Määritelmä 2.4. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin n -ulotteinen *ortogonaalinen ryhmä* O_n on kaikista ortogonaalisista $n \times n$ -matriiseista muodostuva ryhmä, eli

$$O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I_n\}.$$

Ortogonaalinen ryhmä voidaan osoittaa ryhmäksi esimerkiksi aliryhmäkriteeriä käyttämällä, jolloin nähdään, että ryhmä O_n on ryhmän $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ aliryhmä. Määritelmän mukaan ortogonaalisen ryhmän alkiot ovat matriiseja. Tapettiryhmien kuvauksia tutkimme tarvitsemme kuitenkin usein ortogonaalisten matriisien määrittämiä lineaarikuvauksia. Näitä kutsutaan ortogonaalisiksi kuvauksiksi. Koska jokaista lineaarikuvausta vastaa yksi matriisi ja jokaista matriisia yksi lineaarikuvaus, voimme samaistaa ortogonaaliset matriisit ja kuvaukset keskenään.

Isometrisyys ja ortogonaalisuus liittyvät vahvasti toisiinsa. Seuraavista kahdesta lauseesta näemme, että isometristen lineaarikuvausten joukko on yhtenevä ortogonaalisten kuvausten joukon kanssa.

Lause 2.5. *Olkoon $A \in O_n$. Tällöin kuvaus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jossa $f(x) = Ax$, on isometrinen lineaarikuvaus.*

Todistus. Matriisin määrittämä kuvaus on aina lineaarinen, joten riittää osoittaa, että kuvaus f on isometrinen. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$, jolloin

$$|f(x)|^2 = |Ax|^2 = (Ax) \cdot (Ax) = (Ax)^T(Ax) = (x^T A^T)(Ax) = x^T x = x \cdot x = |x|^2.$$

□

Lause 2.6. *Oletetaan, että $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on isometrinen lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa $A \in O_n$, jolle pätee $f(x) = Ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, jolloin on olemassa $n \times n$ -matriisi A siten, että $f(x) = Ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Riittää siis osoittaa, että $A \in O_n$. Merkitään avaruuden luonnollista kantaa $\{e_1, \dots, e_n\}$. Tällöin $Ae_j = a_j$ on j :s sarake matriisissa A kaikilla j . Luonnollinen kanta on ortonormaali, joten kahden toisistaan poikkeavan kantavektorin pistetulo on nolla ja kantavektorin pistetulo itsensä kanssa on yksi. Lemman 2.2 mukaan lineaarikuvaus säilyttää pistetulot, joten $a_j \cdot a_k = 0$, jos $j \neq k$, ja $a_j \cdot a_j = 1$ kaikilla j . Täten

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \dots & a_1 \cdot a_n \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & \dots & a_2 \cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \cdot a_1 & a_n \cdot a_2 & \dots & a_n \cdot a_n \end{bmatrix} = I,$$

joten $A \in O_n$.

□

Tapettiryhmiä tutkittaessa käsitellään koko ajan isometrioita. Olemme näyttäneet, että sekä siirrot että ortogonaaliset kuvaukset ovat isometrioita. Osoittautuu, että nämä kaksi kuvaustyyppiä riittävät kuvaamaan minkä tahansa euklidisen avaruuden isometrian.

Lause 2.7. *Oletetaan, että f on avaruuden \mathbb{R}^n isometria. Tällöin se voidaan esittää siirron ja ortogonaalisen kuvauksen yhdistettynä kuvauksena.*

Todistus. Tutkitaan erikseen kahta tapausta. Oletetaan ensin, että $f(0) = 0$. Lauseen 2.3 mukaan f on tällöin lineaarikuvaus ja lauseen 2.6 mukaan se on täten myös ortogonaalinen. Siirroksi voidaan valita $t_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $f = t_0 \circ f$.

Oletetaan sitten, että $f(0) = v \neq 0$. Määritellään avaruuden \mathbb{R}^n siirrot t_v ja t_{-v} ehdoilla $t_v(x) = x + v$ ja $t_{-v}(x) = x - v$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Määritellään lisäksi kuvaus $g = t_{-v} \circ f$. Tällöin $f = t_v \circ g$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$|g(x) - g(y)| = |t_{-v}(f(x)) - t_{-v}(f(y))| = |f(x) - v - f(y) + v| = |f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

joten määritelmän mukaan g on isometria. Lisäksi havaitaan, että $g(0) = (t_{-v} \circ f)(0) = f(0) - v = 0$, joten lauseen 2.3 mukaan g on lineaarikuvaus. Lauseen 2.6 mukaan kuvaus g on täten ortogonaalinen, joten väite on todistettu. \square

Lopuksi käytämme lausetta 2.7 todistaaksemme, että isometriat muodostavat euklidisessä avaruudessa ryhmän.

Lause 2.8. *Avaruuden \mathbb{R}^n kaikkien isometrioiden joukko $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.*

Todistus. Kuvausten yhdistäminen on tunnetusti liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

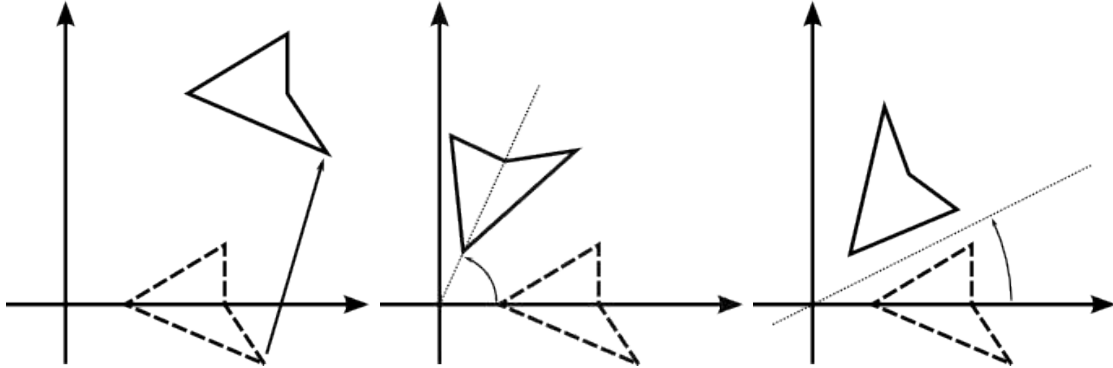
$$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| = |g(x) - g(y)| = |x - y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Joukko $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ on siis suljettu laskutoimituksen suhteen. Identtinen kuvaus $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on isometria, joka toimii ryhmän neutraali-alkiona.

Lauseen 2.7 mukaan mikä tahansa isometria voidaan esittää siirron ja ortogonaalisen kuvauksen yhdisteenä, joten kirjoitetaan $f = v \circ h$, jossa v on siirto ja h on ortogonaalinen kuvaus. Siirrot muodostavat ryhmän, joten kuvauksella v on siirtojen ryhmässä käänteiskuvaus v^{-1} . Samoin ortogonaaliset kuvaukset muodostavat ryhmän, joten kuvauksella h on ortogonaalinen käänteiskuvaus h^{-1} . Täten kuvaukselle f löydetään käänteiskuvaus $f^{-1} = h^{-1} \circ v^{-1}$. Käänteiskuvaus on ortogonaalisen kuvauksen ja siirron, eli kahden isometrian yhdisteenä myös isometria, joten jokaisella alkiolla on käänteisalkio, joka kuuluu joukkoon $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. \square

2.2 Avaruuden \mathbb{R}^2 isometriat

Edellisessä kappaleessa tarkasteltiin, miten isometriat käyttäytyvät yleisessä euklidisessä avaruudessa. Tässä kappaleessa siirrytään tutkimaan isometrioita kaksiulotteisessa Eukli-



Kuva 2.1: Siirto, ortogonaalinen kierto ja ortogonaalinen peilaus

disessa avaruudessa ja nähdään, että ortogonaaliset kuvaukset ilmenevät ainoastaan kahdena eri tyyppisenä kuvauksena, kiertoina ja peilauksina. Yhdistämällä tällaisia kuvauksia siirtoihin saadaan aikaan neljä eri isometriatyyppeä. Tämän luvun tulokset perustuvat Armstrongin [1] lukuun 24.

Määritellään ensin kierto ja peilaus kaksiulotteisessa avaruudessa. Olkoon c avaruuden \mathbb{R}^2 piste, θ jokin kulma ja kuvaus $f_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria, jolla on seuraava ominaisuus: vektorien $x - c$ ja $f_\theta(x) - c$ välinen kulma on θ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Tällöin kuvaus f_θ on *kierto*, piste c on *kiertokeskus* ja kulma θ on *kiertokulma*.

Olkoon m jokin avaruuden \mathbb{R}^2 suora ja kuvaus $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria, joka kuvaa mielivaltaisen pisteen $x \in \mathbb{R}^2$ siten, että piste $g(x)$ on yhtä kaukana suorasta m kuin piste x , ja pisteiden x ja $g(x)$ välinen vektori on suorassa kulmassa suoraan m nähden. Täsmällisesti ilmaistuna siis $\frac{1}{2}(g(x) - x) + x \in m$ ja $g(x) - x \perp m$. Tällöin kuvaus g on *peilaus* ja suora m on *peilausakseli*. Kaksiulotteisen avaruuden siirto, kierto ja peilaus esitetään kuvassa 2.1.

Otetaan tästä luvusta eteenpäin käyttöön uusi merkintätapa. Olkoon A on ortogonaalinen 2×2 -matriisi ja $v \in \mathbb{R}^2$. Merkitään tällöin, että (A, v) on kuvaus avaruudelta \mathbb{R}^2 itselleen ehdolla $(A, v)(x) = Ax + v$. Lauseen 2.7 mukaan mikä tahansa isometria voidaan kirjoittaa ortogonaalisen kuvauksen ja siirron yhdisteenä, joten tällä merkintätavalla voidaan kirjoittaa mikä tahansa isometria. Koska siirrot ja ortogonaaliset kuvaukset ovat molemmat isometriaryhmän aliryhmiä, tiedämme myös, että mikä tahansa näin kirjoitettu kuvaus on isometria.

Lemma 2.9. *Olkoot (A, v) ja (B, w) kaksi avaruuden \mathbb{R}^2 isometriaa. Tällöin niiden yhdistetty kuvaus on $(A, v) \circ (B, w) = (AB, Aw + v)$.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} ((A, v) \circ (B, w))(x) &= (A, v)((B, w)(x)) = (A, v)(Bx + w) \\ &= ABx + Aw + v = (AB, Aw + v)(x). \end{aligned}$$

□

Lause 2.10. *Avaruuden \mathbb{R}^2 ortogonaaliset kuvaukset ovat joko kiertoja origon ympäri tai peilauksia origon kautta kulkevan suoran suhteen.*

Todistus. Ortogonaalinen kuvaus A voidaan esittää 2×2 -matriisina, jolloin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

jossa $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ortogonaalisille matriiseille pätee $A^T A = I$, joten

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = I.$$

Tästä saadaan kolme ehtoa, $a^2 + c^2 = 1$, $ab + cd = 0$ ja $b^2 + d^2 = 1$. Ensimmäisestä ehdosta nähdään, että vektorin (a, c) pituus on $(a, c) \cdot (a, c) = 1$. Kolmannesta ehdosta nähdään, että vektorin (b, d) pituus on 1. Toisesta ehdosta nähdään, että $(a, c) \cdot (b, d) = ab + cd = 0$, joten vektorit (a, c) ja (b, d) ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kaksiulotteisessa tapauksessa vektorien pituudesta ja kohtisuoruudesta voidaan päätellä, että $(b, d) = (-c, a)$ tai $(b, d) = (c, -a)$.

Yhtälö $a^2 + c^2 = 1$ voidaan tulkita yksikköympyrän kaavaksi, jossa a ja c ovat ympyrän jonkin pisteen koordinaatit. Täten voidaan valita kulma θ siten, että $a = \cos \theta$ ja $c = \sin \theta$. Jos $(b, d) = (-c, a)$, niin $b = -\sin \theta$ ja $d = \cos \theta$. Tällöin ortogonaalisen kuvauksen matriisiksi saadaan

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Jos $(b, d) = (c, -a)$, niin $b = \sin \theta$ ja $d = -\cos \theta$. Tällöin ortogonaalisen kuvauksen matriisiksi saadaan

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Ensimmäinen tapaus kuvaa kiertoa origon ympäri, kun kiertokulma on θ [6, s. 117]. Toinen tapaus kuvaa peilausta origon kautta kulkevan suoran suhteen. Suoran ja vaaka-akselin välinen kulma on $\frac{\theta}{2}$ [6, s. 119]. Ortogonaaliset kuvaukset ovat siis joko kiertoja tai peilauksia. □

Tässä luvussa tarvitsemme seuraavaa, kiertomatriiseihin liittyvää aputulosta.

Lemma 2.11. *Olkoon A kiertoa kuvaava matriisi ja $v \in \mathbb{R}^2$. Tällöin yhtälöllä $v = x - Ax$ on tasan yksi ratkaisu.*

Todistus. Koska $v = x - Ax = x(I - A)$, yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos matriisi $I - A$ on kääntyvä. Lauseen 2.10 todistuksen mukaan

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

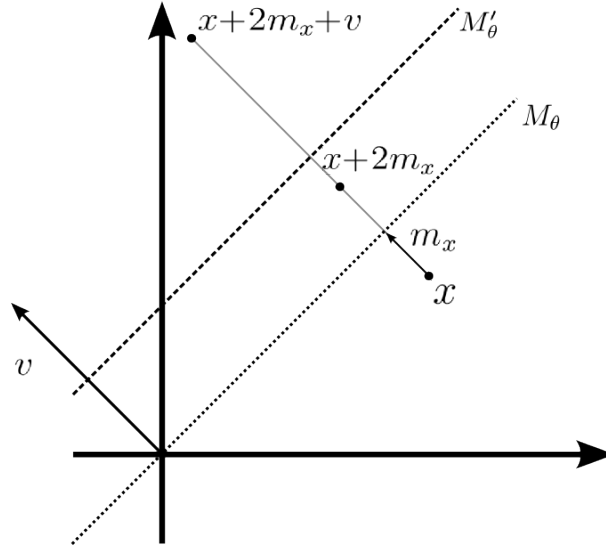
jossa θ on kiertokulma. Jos $\theta = 2\pi n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$, niin $I - A = 0$ on kääntyvä. Jos $\theta \neq 2\pi n$, niin $\det(I - A) = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2\cos \theta > 0$. Täten matriisi $I - A$ on kääntyvä. □

Merkitään tästä eteenpäin ortogonaalisia kiertoja (rotation) symbolilla R_θ , jossa θ on kiertokulman suuruus, ja ortogonaalisia peilauksia (mirror) symbolilla M_θ , jossa $\frac{\theta}{2}$ on peilausakselin ja x -akselin välinen kulma. Muistetaan, että ortogonaalisissa peilauksissa peilausakseli kulkee aina origon kautta ja että ortogonaaliset kierrot tapahtuvat aina origon ympäri. Käytetään termiä *puolikierto* kierrosta R_π ja termejä kolmanneskierto, neljänneskierto jne. vastaavasti. Tällöin vektorin v suuruinen siirto on (I, v) , kierto origon ympäri on $(R_\theta, 0)$ ja peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen on $(M_\theta, 0)$.

Yhdistämällä näitä kuvauksia saadaan uudenlaisia kuvauksia. Tutkitaan ensin, miltä näyttää kierron ja siirron yhdiste. Olkoon R_θ kierto, $v \in \mathbb{R}^2$ ja näiden yhdistetty kuvaus (R_θ, v) . Lemman 2.11 mukaan voidaan valita yksikäsitteinen $r \in \mathbb{R}^2$, jolla $v = r - R_\theta r$. Jos origo siirretään pisteeseen r , kuvaus muuttuu origokeskeiseksi kierroksi $(R_\theta, 0)$, sillä $v = 0 - R_\theta 0 = 0$. Nähdään siis, että (R_θ, v) on *kierto pisteen r ympäri*.

Tarkastellaan seuraavaksi, minkälainen kuvaus saadaan, kun yhdistetään peilaukseen siirto, joka on kohtisuorassa peilausakselia vastaan. Olkoon siis M_θ peilaus ja $v \in \mathbb{R}^2$ sen peilausakselia vastaan kohtisuorassa oleva vektori, jolloin tarkasteltava kuvaus on (M_θ, v) . Valitaan mielivaltainen piste $x \in \mathbb{R}^2$ ja tutkitaan miten se kuvautuu. Määritellään vektori $m_x = \frac{1}{2}(M_\theta x - x)$, eli m_x on peilausakselia vastaan kohtisuorassa oleva vektori, jonka pituus on yhtä suuri kuin pisteen x etäisyys peilausakselistä ja sen suunta pisteestä x kohti peilausakselia. Kuva 2.2 havainnollistaa vektorin valintaa. Tällöin (M_θ, v) siirtää pistettä x ensin peilausakselin yli vektorin $2m_x$ verran ja tämän jälkeen vielä vektorin v verran. Yhteensä kuvaus (M_θ, v) siirtää pistettä x vektorin $2m_x + v$ verran. Tällainen peilaus nähdään kuvassa 2.2.

Verrataan kuvausta (M_θ, v) peilaukseen M'_θ , jonka peilausakseli on samansuuntainen kuin kuvauksen M_θ , mutta sijaitsee sijaitsee vektorin $\frac{1}{2}v$ päässä kuvauksen M_θ peilausakselistä. Koska peilausakselit ovat yhdensuuntaiset, M'_θ siirtää pistettä x samaan suuntaan



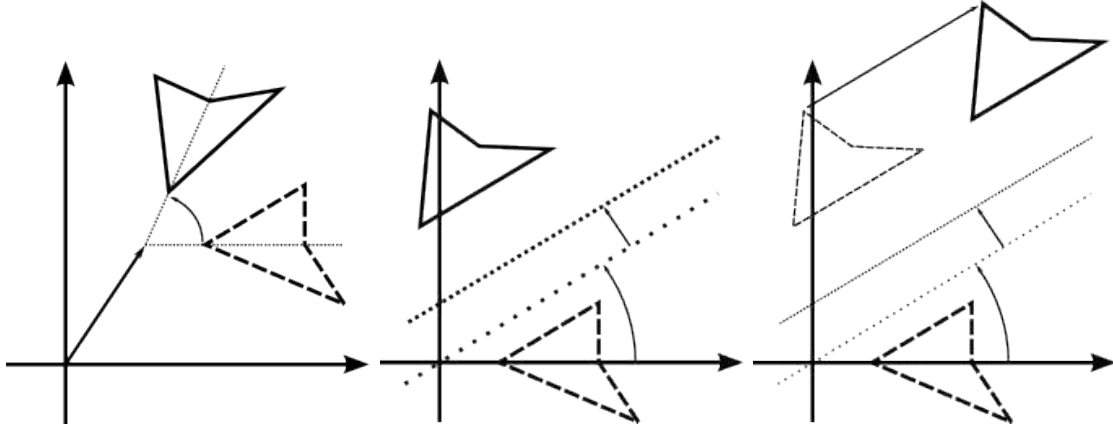
Kuva 2.2: Peilauksen ja peilausakselin kanssa kohtisuoran siirron yhdiste on edelleen peilaus.

kuin (M_θ, v) . Koska kuvauksen M'_θ peilausakselin etäisyys pisteestä x on $m_x + \frac{1}{2}v$, kyseinen kuvaus siirtää pistettä vektorin $2(m_x + \frac{1}{2}v) = 2m_x + v$ verran. Näin ollen kyseessä on sama kuvaus kuin (M_θ, v) . Koska ortogonaalisen kuvauksen M_θ peilausakseli leikkaa origon, voidaan päätellä, että (M_θ, v) on peilaus, jonka peilausakseli sijaitsee etäisyydellä $|\frac{1}{2}v|$ origosta.

Tarkastellaan lopuksi, miltä näyttää peilaus yhdistettynä mielivaltaiseen siirtoon. Olkoon M_θ peilaus ja $v \in \mathbb{R}^2$. Vektori v voidaan jakaa kahteen komponenttiin, joista toinen on peilausakselin suuntainen ja toinen on sen kanssa kohtisuorassa. Edellisen perusteella tällöin kuvaus (M_θ, v) on peilaus, jonka akseli on jonkin etäisyyden päässä origosta, yhdistettynä peilausakselin suuntaiseen siirtoon. Kuvausta (M_θ, v) kutsutaan *liukupeilaukseksi*. Periaatteessa kaikki peilaukset ovat siis liukupeilauksia, joiden peilausakselin suuntainen siirto on nolla. Käytämme kuitenkin termiä liukupeilaus ainoastaan epätriviaaleista liukupeilauksista.

Yhdistämällä siirtoja ja ortogonaalisia kuvauksia olemme saaneet aikaan siirtoja, kiertoja, peilauksia ja liukupeilauksia. Näitä kuvauksia havainnollistavat kuvat 2.1 ja 2.3. Seuraava lause kertoo, että kaikki avaruuden \mathbb{R}^2 isometriat ovat jotakin näistä kuvaus-tyypeistä.

Lause 2.12. *Olkoon (A, v) avaruuden \mathbb{R}^2 isometria. Jos A on kierto, (A, v) on joko siirto tai kierto. Jos A on peilaus, (A, v) on joko peilaus tai liukupeilaus.*



Kuva 2.3: Kierto mielivaltaisen pisteen ympäri ja peilaus sekä liukupeilaus mielivaltaisen suoran suhteen.

Todistus. Oletetaan, että A on kierto. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

jollakin kulmalla θ . Jos $\theta = 0$, saadaan $A = I$, jolloin kyseessä on siirto. Jos $\theta \neq 0$ ja $v = 0$, kyseessä on kierto origon ympäri. Muussa tapauksessa voidaan lemmän 2.11 perusteella valita sellainen $r \in \mathbb{R}^2$, että $(A, v) = (A, r - Ar)$, joka on kierto pisteen r ympäri.

Oletetaan sitten, että A on peilaus. Jos $v = 0$, kyseessä on peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen. Muussa tapauksessa valitaan $w = v - Av$, joka on kohtisuorassa peilausakselia vastaan. Määritellään $a = \text{proj}_w(v)$ ja $b = v - a = v - \text{proj}_w(v)$, jolloin b on kohtisuorassa vektoria w vastaan eli peilausakselin suuntainen. Nyt $(A, v) = (A, a + b)$. Jos $b = 0$ kyseessä on peilaus, jonka peilausakseli sijaitsee $|\frac{1}{2}a|$ etäisyydellä origosta. Muussa tapauksessa kyseessä on liukupeilaus. \square

Tulemme seuraavissa luvuissa käyttämään paljon kuvausten yhdistämistä. Tätä varten tarvitsemme tietoa siitä, minkälaisia kuvauksia saadaan aikaiseksi kun peilauksia ja liukupeilauksia yhdistetään toisiinsa.

Lause 2.13. Olkoot l ja m suoria, joiden välinen kulma on $\theta \neq 0$ ja leikkauspiste O . Olkoot f_l ja f_m peilaukset näiden suorien suhteen. Tällöin yhdistetty kuvaus $f_l \circ f_m$ on kierto, jonka suuruus on 2θ ja kiertokeskus O .

Todistus. Valitaan koordinaatisto siten, että x -akseli on suoran l suuntainen ja origo on pisteessä O . Tällöin $f_l = (M_0, 0)$ ja $f_m = (M_{2\theta}, 0)$. Niiden yhdistetty kuvaus on lemmän

2.9 mukaan $f_l \circ f_m = (M_0, 0) \circ (M_{2\theta}, 0) = (M_0 M_{2\theta}, 0)$. Matriisikertolaskulla nähdään, että

$$M_0 M_{2\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R_{2\theta}.$$

Täten yhdistetty kuvaus on 2θ suuruinen kierto origon ympäri. \square

Korollaari 2.14. *Olkoot (M, v) ja (M', v') liukupeilauksia, joiden peilausakselit ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Tällöin niiden yhdistetty kuvaus on puolikierto, jonka kierto-keskus on $\frac{1}{2}(v + v')$.*

Todistus. Aiemmin tässä luvussa nähtiin, että liukupeilaus (M, v) voidaan esittää muodossa $(M, 2a + b)$, jossa $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \perp b$ ja b on peilauksen M peilausakselin suuntainen. Lisäksi nähtiin, että tällöin liukupeilauksen $(M, 2a + b)$ peilausakseli sijaitsee $|a|$ etäisyydellä origosta. Vastaavasti voidaan valita sellaiset $a', b' \in \mathbb{R}^2$, joilla $(M', v') = (M', 2a' + b')$.

Peilauksien M ja M' peilausakseleiden leikkauspiste on nyt $a + a'$. Valitaan tämä origoksi. Tällöin yhdistetty kuvaus on lemmän 2.9 mukaan $(M, b) \circ (M', b') = (MM', Mb' + b)$. Lauseen 2.13 mukaan MM' on puolikierto origon ympäri. Vektori b' on kohtisuorassa kuvauksen M peilausakselia vastaan, joten $Mb' = -b'$. Yhdistetty kuvaus saadaan muotoon $(R_\pi, b - b')$. Valitaan $r = \frac{1}{2}(b - b')$, jolloin $b - b' = r - R_\pi r$. Yhdistetyksi kuvaukseksi saadaan siis $(R_\pi, r - R_\pi r)$, eli puolikierto pisteen r ympäri. Siirryttäessä takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon kiertokeskukseksi saadaan $a + a' + \frac{1}{2}(b - b') = \frac{1}{2}(v + v')$. \square

Lause 2.13 olettaa, että peilausakselit eivät ole yhdensuuntaisia. Mikäli näin kuitenkin on, tuloksena ei ole kierto, vaan siirto.

Lause 2.15. *Olkoon (M, v_1) ja (M, v_2) liukupeilauksia, joiden peilausakselit ovat yhdensuuntaiset. Tällöin niiden yhdistetty kuvaus on siirto.*

Todistus. Merkitään $v_1 = 2x_1 + y_1$ ja $v_2 = 2x_2 + y_2$, jossa x_1 ja x_2 ovat kohtisuorassa peilausakseleita vastaan ja y_1 ja y_2 ovat peilausakselien suuntaisia. Tällöin $Mx_i = -x_i$ ja $My_i = y_i$ kun $i \in \{1, 2\}$. Käyttämällä tätä tietoa ja lemmaa 2.9 saadaan yhdistetty kuvaus

$$\begin{aligned} (M, v_1) \circ (M, v_2) &= (M, 2x_1 + y_1) \circ (M, 2x_2 + y_2) \\ &= (MM, M(2x_2 + y_2) + 2x_1 + y_1) \\ &= (I, 2(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)). \end{aligned}$$

\square

Tämän lauseen seurauksena saadaan vielä hyödyllinen tieto peilausten kertaluvuista.

Korollari 2.16. *Peilausten kertaluku on kaksi ja liukupeilausten kertaluku on ääretön.*

Todistus. Olkoon (M, v) peilaus, jolloin v on kohtisuorassa peilausakselia kohden. Tällöin $(M, v) \circ (M, v) = (MM, Mv + v) = (I, -v + v) = (I, 0)$, eli kahden peilauksen yhdiste on identtinen kuvaus.

Olkoon (M, v) liukupeilaus. Merkitään $v = 2x + y$, jossa x on kohtisuorassa peilausakselia kohden ja y on sen kanssa yhdensuuntainen. Lauseen 2.15 todistuksen mukaan kahden tällaisen liukupeilauksen yhdiste on peilausakselin suuntainen siirto $(I, 2y)$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Jos n on parillinen, niin $(M, 2x + y)^n = (I, 2y)^{\frac{n}{2}} = (I, ny)$. Jos n on pariton, niin $(M, 2x)^n = (I, (n-1)y) \circ (M, 2x + y) = (M, 2x + ny)$. Kummassakaan tapauksessa ei saada aikaan identtistä kuvausta, joten liukupeilauksen kertaluku on ääretön. \square

Luku 3

Hilat ja pisteryhmät

Tässä luvussa määrittelemme viimein formaalisti sekä tapettikuvion että tapettiryhmän. Näiden ydinkäsitteiden lisäksi määrittelemme muutaman muun hyödyllisen ryhmän ja todistamme niihin liittyviä myöhemmin tarvittavia lauseita. Kappaleen tulokset nojaavat Morandin [2] ensimmäiseen lukuun.

Jotta voisimme täsmällisesti määritellä tapettikuvion, tarvitsemme muutamia peruskäsitteitä.

Määritelmä 3.1. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin joukon X *symmetriaryhmä* on

$$\text{Sym}(X) = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(X) = X\}.$$

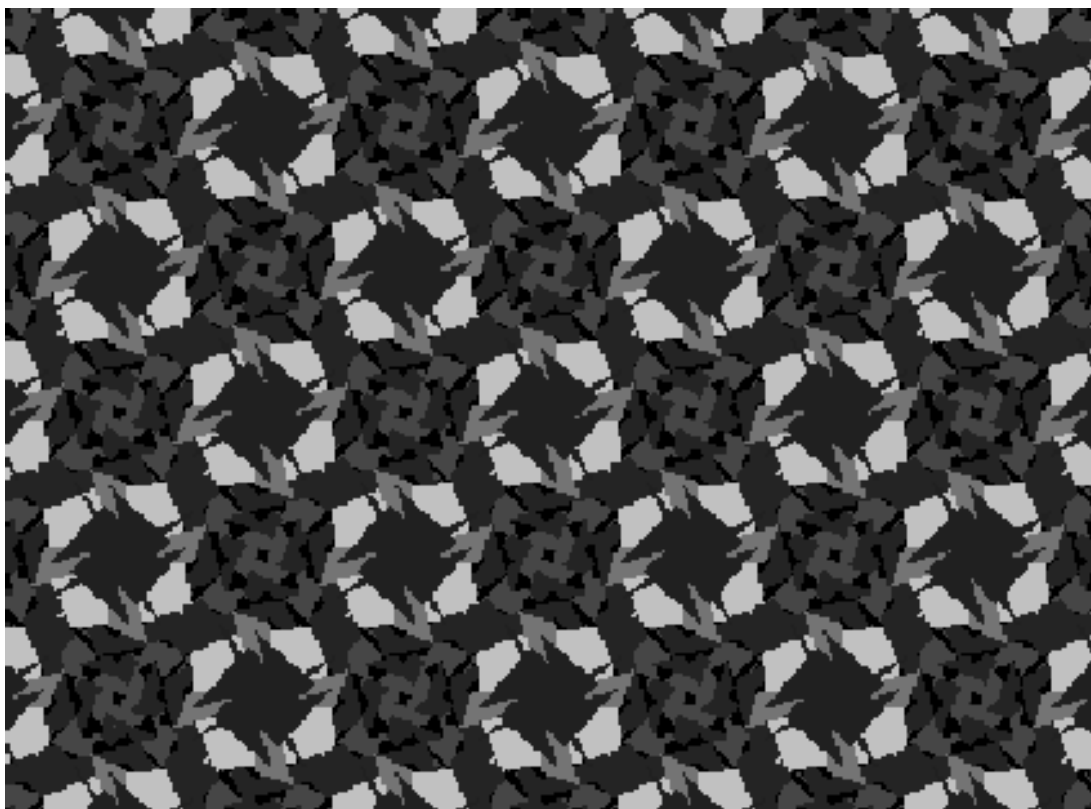
Voidaan osoittaa, että symmetriaryhmä on isometriaryhmän aliryhmä ja täten todellakin ryhmä. Tämä onnistuu helpoiten aliryhmäkriteeriä käyttämällä. Todistus on suoraviivainen, joten sitä ei esitetä tässä. Symmetriaryhmä muodostuu siis kaikista niistä kuvauksista, jotka säilyttävät joukon muuttumattomana.

Edellisessä luvussa tutustuttiin siirtoihin, kiertoihin, peilauksiin ja liukupeilauksiin. Onkin helppo nähdä, kuinka esimerkiksi tavallinen nelikulmainen tai kuusikulmainen ruudukko säilyy muuttumattomana, jos sitä siirretään, peilataan tai kierretään sopiva määrä. Kuvasta 3.1 kuitenkin nähdään, että monimutkaisemmasta kuviosta symmetrioiden näkeminen on huomattavasti vaikeampaa. Erityisen haastavaa on todeta tyhjentävästi, mitä kaikkia kuvioita symmetriaryhmään kuuluu ja etenkin mitä siihen ei kuulu. Koko luku 4 onkin omistettu pelkästään näiden kysymysten tarkasteluun.

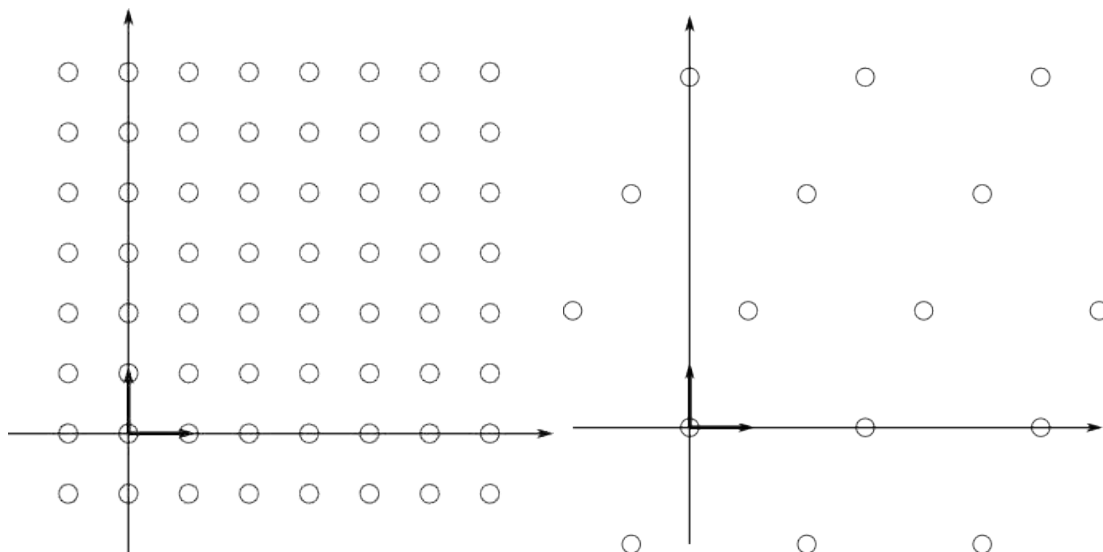
Symmetriaryhmän lisäksi tarvitsemme myös hilan käsitettä.

Määritelmä 3.2. *Hila* on avaruuden \mathbb{R}^n äärellisviritteinen aliryhmä.

Yksinkertainen esimerkki hilasta on avaruuden \mathbb{R}^n luonnollisen kannan virittämä aliryhmä. Luonnollisessa kannassa on n vektoria, eli se on äärellinen. Tähän hilaan kuuluvat kaikki vektorit (x_1, x_2, \dots, x_n) , jossa x_i on kokonaisluku kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.



Kuva 3.1: Ei ole ilmeistä, että tässä tapettikuviossa on neljänneskiertoja ja puolikiertoja, mutta ei peilauksia eikä liukupeilauksia. [5]



Kuva 3.2: Luonnollisen kannan virittämä hila ja joukon $\{(3, 0), (1, 2)\}$ virittämä hila ovat avaruuden \mathbb{R}^2 aliryhmiä.

Hilan virittävien vektorien ei aina tarvitse olla ortogonaalisia tai saman pituisia. Esimerkiksi vektorit $(3, 0)$ ja $(1, 2)$ virittävät hilan, joka on avaruuden \mathbb{R}^2 aliryhmä. Esimerkit luonnollisen kannan ja joukon $\{(3, 0), (1, 2)\}$ virittämistä hiloista nähdään kuvassa 3.2.

Näitä käsitteitä käyttämällä pääsemme määrittelemään tapettikuvion, jonka varaan koko työ rakentuu. Seinille ripustettavissa tapeteissa on yleensä toistuvia kuvioita. Kuvio toistuu pystysuorassa ja vaakasuorassa luoden mielikuvan siitä, että kuvio on ”samanlainen” joka paikassa. Tapettikuviolla on siis sellainen ominaisuus, että jos riittävän suurta kuviota siirretään pysty- tai vaakasuunnassa tietty määrä, katsoja ei havaitse itse kuviossa mitään eroa. Otetaan tämä ominaisuus tapettikuvion määritelmän pohjaksi. Mikään ei estä meitä asettamasta tapettia seinälle vinoon kulmaan, joten sallimme toiston myös muissa suunnissa kuin pysty- ja vaakasuorassa.

Oletetaan, että meillä on kaksiulotteinen kuvio $W \subset \mathbb{R}^2$, jota voidaan siirtää (eri suuntaisten) vektorien a ja b verran siten, että kuvio pysyy muuttumattomana. Tällöin kuvioita voidaan tietenkin siirtää myös vektorin $ma + nb$ verran kun m ja n ovat mielivaltaisia kokonaislukuja.

Tällaisen kuvion symmetriaryhmään kuuluvat siis vektorit $ma + nb$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Täsmällinen määritelmä vaatii, että valitsemme siirtoja kuvaamaan lyhyimmät mahdolliset vektorit. Jos kuviota W voidaan siirtää esimerkiksi $\frac{1}{2}a$ verran, ei vektorin a käyttäminen ole järkevää. On myös mahdollista keksiä kaksiulotteisia kuvioita, joita voidaan siirtää edellämainitulla tavalla, mutta joilla ei ole lyhintä siirtovektoria. Esimerkiksi \mathbb{Q}^2 on tällainen kuvio. Jos lyhyimmät siirtovektorit ovat olemassa, saamme tapettikuvion

formaalin määritelmän kätevästi aikaiseksi käyttämällä hilan käsitettä.

Määritelmä 3.3. Olkoon $W \subset \mathbb{R}^2$. Kuviota W kutsutaan *tapettikuvioksi*, mikäli sen symmetriaryhmän siirrot muodostavat kaksiulotteisen hilan. Tapettikuvion symmetriaryhmää kutsutaan *tapettiryhmäksi* ja siirtojen muodostamaa hilaa *siirtohilaksi*.

Määritelmästä seuraa, että tapettikuviot, tapettiryhmät ja siirtohilat ovat kaikki äärettömiä. Käytetään vastaisuudessa tapettikuviolle merkintää W , sen tapettiryhmälle merkintää G ja siirtohilalle merkintää H . Näiden peruskäsitteiden jälkeen lähdemme tarkastelemaan tapettikuvion pisteryhmiä. Käytämme samaa lähestymistapaa kuin Moranin [2] luvussa 3.

Edellisessä luvussa huomattiin, että isometriat ja näin ollen myös tapettiryhmän alkiot koostuvat kahdenlaisista kuvauksista, siirroista ja ortogonaalisista kuvauksista. Määritellään tapettiryhmän pisteryhmä tarkoittamaan niitä ortogonaalisia kuvauksia, jotka yhdistettynä johonkin siirtoon muodostavat tapettiryhmän alkion.

Määritelmä 3.4. Olkoon G tapettiryhmä. Tällöin sen *pisteryhmä* on

$$P = \{A \in O_2 \mid (A, b) \in G \text{ jollakin } b \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pisteryhmä voidaan todeta ryhmäksi suoraviivaisella todistuksella ryhmän määritelmää käyttämällä. Käytetään vastaisuudessa pisteryhmälle merkintää P .

Pisteryhmän alkiot ovat siis ortogonaalisia kuvauksia, joten jokaista kuvausta vastaa ortogonaalinen matriisi. Samaistetaan kuvaukset ja matriisit. Lauseen 2.10 mukaan pisteryhmän kuvaukset ovat kiertoja tai peilauksia. Kierrot kuvaavat kiertokeskuksen itselleen ja peilaukset kuvaavat kaikki peilausakselin pisteet itselleen, joten kaikille pisteryhmän kuvauksille löytyy ainakin yksi piste, jonka kuvaus säilyttää muuttumattomana. Nimitys pisteryhmä viittaa juuri tähän ominaisuuteen. Tapettiryhmän, pisteryhmän ja siirtohilan välillä on yhteys, joka ilmenee seuraavasta lauseesta.

Lause 3.5. Olkoon G tapettiryhmä ja olkoot H ja P sen siirtohila ja pisteryhmä. Tällöin $P \cong G/H$.

Todistus. Olkoon kuvaus $\pi: G \rightarrow O_2$ ehdolla $\pi(A, b) = A$. Muistetaan, että $(A, b)(x) = Ax + b$, joten $(A, b) \circ (A', b') = (AA', Ab' + b)$. Nyt nähdään, että π on homomorfismi, sillä

$$\pi((A, b) \circ (A', b')) = \pi((AA', Ab' + b)) = AA' = \pi(A, b)\pi(A', b')$$

kaikilla $(A, b), (A', b') \in G$. Kuvauksen ydin $\text{Ker } \pi = \{(A, b) \mid A = I\} = H$, joten H on ryhmän G normaali aliryhmä ja kuva $\text{Im } \pi = \{A \mid (A, b) \in G\} = P$. Ryhmien homomorfialauseen mukaan $P = \text{Im } \pi \cong G/\text{Ker } \pi = G/H$. \square

Pisteryhmän määritelmän mukaan jokaista pisteryhmän alkioita vastaa jokin tapettiryhmän kuvaus. Ilmenee, että myös jokaista tapettiryhmän kuvausta vastaa jokin pisteryhmän alkio.

Lause 3.6. *Jokainen tapettiryhmän alkio voidaan esittää muodossa (A, b) , jossa A on tapettiryhmän pisteryhmän alkio ja b on siirto.*

Todistus. Määritelmän mukaan tapettiryhmän alkiot ovat isometrioita ja lauseen 2.7 mukaan mikä tahansa isometria voidaan esittää ortogonaalisen kuvauksen ja siirron yhdisteenä. Täten tapettiryhmän alkio voidaan esittää muodossa (A, b) , jossa $A \in O_2$ ja $b \in \mathbb{R}^2$. Pisteryhmän määritelmän mukaan tällöin A on pisteryhmän alkio. \square

On kuitenkin tärkeää huomata, että pisteryhmän alkio itsessään ei välttämättä kuulu tapettiryhmään. Esimerkiksi seuraavassa luvussa esiteltävä tapettiryhmä pg koostuu ainoastaan siirroista ja liukupeilauksista. Vaikka liukupeilaus muodostuu peilauksesta ja siirrosta, tapettiryhmään ei kuulu yhtäkään peilausta. Tapettiryhmän pg ainoa ortogonaalinen kuvaus onkin identtinen kuvaus.

Tapettiryhmästä löytyykin usein kuvauksia, jotka eivät kuvaa siirtohilaa itselleen. Kaikki siirrot tietenkin kuvaavat siirtohilan itselleen, mutta esimerkiksi ryhmän pg liukupeilausten siirto on vain puolet siirtohilan virittäjävektorin pituudesta, joten liukupeilaukset eivät säilytä siirtohilaa muuttumattomana. Tästä huolimatta seuraavassa lauseessa nähdään, että kaikki pisteryhmän kuvaukset kuvaavat siirtohilan itselleen.

Lause 3.7. *Pisteryhmän kuvaukset kuvaavat siirtohilan itselleen, eli $M(H) = H$ kaikilla pisteryhmän alkiolla M .*

Todistus. Olkoot G tapettiryhmä, H sen siirtohila ja $x \in H$. Olkoon M jokin pisteryhmän kuvaus, jolloin on olemassa sellainen $w \in \mathbb{R}^2$, että $(M, w) \in G$. Lauseen 3.5 todistuksessa nähtiin, että siirtohila H on tapettiryhmän G normaali aliryhmä, joten $ghg^{-1} \in H$ kaikilla $g \in G$ ja $h \in H$. Täten $(M, w) \circ (I, x) \circ (M, w)^{-1} \in H$. Toisaalta

$$\begin{aligned} & (M, w) \circ (I, x) \circ (M, w)^{-1} \\ &= (M, w) \circ (I, x) \circ (M^{-1}, -M^{-1}w) \\ &= (M, w) \circ (M^{-1}, -M^{-1}w + x) \\ &= (MM^{-1}, M(-M^{-1}w) + Mx + w) \\ &= (I, Mx), \end{aligned}$$

joten voimme päätellä, että $(I, Mx) \in H$. Täten Mx on siirtohilan vektori, joten $M(H) \subset H$.

Koska M on pisteryhmän kuvaus, pisteryhmään kuuluu myös käänteiskuvaus M^{-1} . Edellä osoitettiin, että pisteryhmän kuvaukset kuvaavat siirtohilan pisteet itselleen, joten $M^{-1}x = h$ jollakin $h \in H$. Täten $x = Mh$, eli $H \subset M(H)$. \square

Tapetti- ja pisteryhmillä on toinenkin perustavanlaatuinen ero. Tapettiryhmät ovat aina äärettömiä, mutta kuten seuraavasta lauseesta nähdään, pisteryhmät ovat poikkeuksetta äärellisiä.

Lause 3.8. *Tapettiryhmän G pisteryhmä P on äärellinen.*

Todistus. Olkoon H tapettiryhmän G siirtohila ja C origokeskeinen ympyrä joka sisältää hilan kannan. Koska hila ns. toimii avaruuteen \mathbb{R}^n ankarasti epäjatkuvasti (engl. properly discontinuously), lauseen [7, Theorem 3.1.3] perusteella tiedetään, että hila on diskreetti joukko. Koska avaruuden \mathbb{R}^n suljettu yksikkökuula on kompakti, niin tällöin suljettu yksikkökuula sisältää vain äärellisen määrän pisteitä [8, Luku 13]. Täten myös ympyrä C sisältää äärellisen määrän pisteitä. Pisteryhmän kuvaukset ovat ortogonaalisia, joten ne ovat myös isometrioita. Täten pisteryhmän kuvaukset eivät voi kuvata ympyrän sisältämiä pisteitä ympyrän ulkopuolelle, joten ympyrän sisältämät pisteet kuvautuvat toisilleen. Näin ollen on olemassa vain äärellinen määrä pareja, joille hilan kantavektorit voivat kuvautua. Koska hilan kantavektorit muodostavat myös koko avaruuden \mathbb{R}^2 kannan ja se, miten kantavektorit kuvautuvat määrittää kuvauksen yksikäsitteisesti, on olemassa vain äärellinen määrä erilaisia kuvauksia, jotka kuvaavat kaikki ympyrän C sisältämät pisteet itselleen. \square

Äärellisyyden lisäksi pisteryhmät ovat huomattavan yksinkertaisia rakenteeltaan. Ilmenee, että pisteryhmät ovat isomorfisia joko syklisten ryhmien tai diedriryhmien kanssa. Lisäksi niiden kertaluku on rajattu. Tämä ominaisuus on oleellinen viimeisessä luvussa, jossa osoitamme että kaikki seitsemäntoista tapettiryhmään ovat todellakin eri ryhmiä. Tämän hyödyllisen tuloksen todistamiseen tarvitaan kuitenkin aputulos.

Lemma 3.9. *Olkoon P pisteryhmä ja $N = \{\varphi \in P \mid \varphi \text{ on kierto}\}$. Tällöin N on pisteryhmän syklinen ja normaali aliryhmä.*

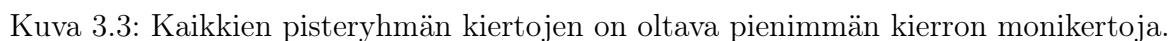
Todistus. Määritelmästä on selvää, että N on ryhmän P osajoukko ja tunnetusti P on ryhmä. Identtinen kuvaus, eli ryhmän P neutraalialkio, on myös kierto, joten $N \neq \emptyset$. Kierron käänteiskuvaus on kierto ja kahden kierron yhdiste on kierto, joten $p_1 p_2^{-1} \in N$ kaikilla $p_1, p_2 \in P$. Aliryhmäkritereen mukaan N on täten ryhmän P aliryhmä.

Lauseen 2.10 mukaan ortogonaaliset kuvaukset ovat joko kiertoja tai peilauksia. Lisäksi lauseen todistuksessa nähtiin, että kierrot ovat muotoa

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ja peilaukset muotoa

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$



Olkoot $A \in P$ ja $B \in N$, jolloin A on kierto tai peilaus ja B on kierto. Tällöin

$$\det(ABA^{-1}) = \det(A) \det(B) \det(A^{-1}) = 1,$$

Osoitetaan vielä lopuksi, että N on syklinen. Lauseen 3.8 mukaan P on äärellinen, joten myös N on äärellinen. Täten joukossa N on kierto, jonka kiertokulma on minimaalinen. Olkoon tämä pienin kierto r ja sen kiertokulma ψ . Olkoon $q \in N$ ja olkoon ϕ kierron q kiertokulma. Oletetaan, että q ei ole alkion r monikerta, eikä siis myöskään ϕ ole kulman ψ monikerta. Kuva 3.3 havainnollistaa tätä tilannetta. Tällöin on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $m\psi < \phi < (m+1)\psi$. Tällöin kuitenkin $\phi - m\psi < (m+1)\psi - m\psi = \psi$, mikä on ristiriita, sillä ψ oli kulmista pienin. Täten q on alkion r monikerta, joten $N \subset \langle r \rangle$.

Nyt saamme todistettua lauseen, jossa liitetään pisteryhmät syklisiin ryhmiin ja diedri-ryhmiin. Diedri-ryhmä D_n on kahden alkion s ja t virittämä ryhmä $\langle s, t \rangle$, jolle pätee $s^n = t^2 = (ts)^2 = 1$. Diedri-ryhmä D_n on säännöllisen n -kulmion symmetriaryhmä ja siinä on $2n$ alkioita. Syklinen ryhmä on yhden alkion virittämä ryhmä. Lauseen suorana seurauksena saatava korollaari kertoo, että pisteryhmiä on korkeintaan kymmenen erilaista.

22

Todistus. Lauseen 2.10 mukaan pisteryhmän kuvaukset ovat joko kiertoja tai peilauksia, joten niiden determinantti on lemmän 3.9 mukaan joko 1 tai -1 . Tarkastellaan pisteryhmän P kierroista koostuvaa aliryhmää N , jonka jäsenten determinantti on 1. Lemman 3.9 mukaan N on syklinen. Jos P sisältää ainoastaan matriiseja, joiden determinantti on 1, $P = N$. Tällöin $P \cong C_n$, jossa $n = |N|$.

Olkoon siis P sellainen, että se sisältää myös kuvauksia, joiden determinantti on -1 . Tällöin determinantti on ryhmähomomorfismi $\det: P \rightarrow \{1, -1\}$, jolle pätee $\text{Ker}(\det) = N$ ja $\text{Im}(\det) = \{1, -1\}$. Ryhmien homomorfialauseen mukaan $[P: N] = 2$.

Olkoon $r \in N \subset P$ sellainen, että $\langle r \rangle = N$ ja olkoon $p \in P \setminus N$. Tällöin r on kierto, p on peilaus ja $\langle r, p \rangle \subset P$. Olkoon $f \in P$. Jos f on kierto, $f \in N \subset \langle p, r \rangle$. Jos f on peilaus fp on kahden peilauksen yhdisteenä kierto, joten $fp \in N$, eli $fp = r^k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Täten $f = r^k p \in \langle p, r \rangle$, joten $P = \langle p, r \rangle$.

Kierroille pätee $r^n = 1$, kun $n = |N|$ ja peilauksille pätee $p^2 = 1$. Tiedetään, että peilauksen ja kierron yhdistetty kuvaus on peilaus, joten $(pr)^2 = 1$. Lisäksi Lagrangen lauseen mukaan $|G| = 2|N|$. Täten $P = \langle p, r \mid p^n, r^2, (pr)^2 \rangle = D_n$. \square

Korollari 3.11. *Tapettiryhmän G pisteryhmä P on isomorfinen joko syklisen ryhmän C_n tai diedriryhmän D_n kanssa, jossa $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.*

Todistus. Olkoon N pisteryhmän kierroista koostuva aliryhmä. Olkoon lisäksi H pisteryhmän siirtohila ja $\{a, b\}$ sen kanta. Standardikannan suhteen kierron matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_\theta,$$

jossa θ on kiertokulma. Koska pisteryhmän alkiot kuvaavat siirtohilan pisteet siirtohilan pisteille, voidaan kierto esittää kannan $\{a, b\}$ suhteen matriisinä

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = R'_\theta,$$

jossa k_1, k_2, k_3 ja k_4 ovat kokonaislukuja. Johdetaan näistä kahdesta samaa kuvausta esittävistä matriisiesityksestä raja kulman θ arvolle käyttäen kannanvaihtomatriisia ja matriisin jälkeä.

Tunnetusti on olemassa kannanvaihtomatriisi K , joka kuvaa standardikannan kannalle $\{a, b\}$. Kannanvaihtomatriisin avulla ilmaistuna $R'_\theta = K R_\theta K^{-1}$. Lisäksi matriisin jäljelle pätee $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ kaikilla $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [4, s. 186]. Käyttämällä näitä kahta tietoa havaitaan, että

$$\text{tr}(R'_\theta) = \text{tr}(K R_\theta K^{-1}) = \text{tr}(K^{-1} K R_\theta) = \text{tr}(R_\theta).$$

Kuvauksen jälki on siis kannasta riippumaton, joten

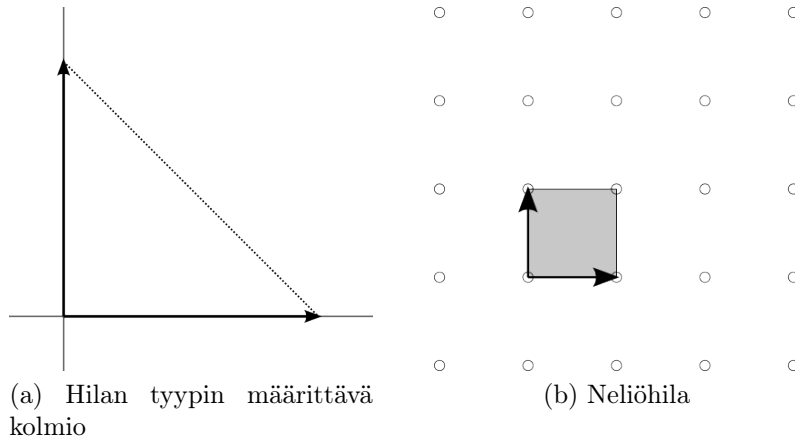
$$\operatorname{tr}(r) = 2 \cos \theta = k_1 + k_4 \in \mathbb{Z}.$$

Tästä saadaan ehto $\cos \theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ ja edelleen $\theta \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\}$. Jokaisen ryhmän N alkion ja näin ollen myös koko ryhmän kertaluku on siis 1, 2, 3, 4 tai 6. Lemman 3.10 todistuksessa nähtiin, että P on isomorfinen joko ryhmän C_n tai D_n kanssa, jossa $n = |N|$. \square

Siirtohilat

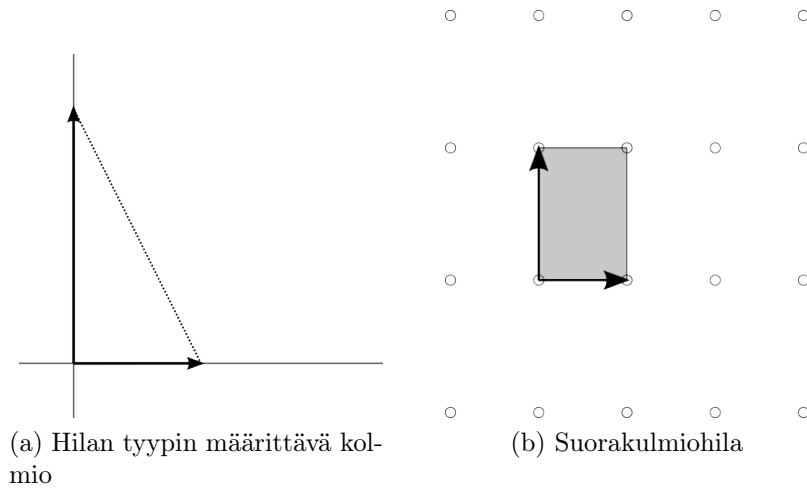
Paljastuu, että siirtohila voi olla vain yksi viidestä mahdollisesta muodosta. Olkoon a sellainen hilan H vektori, jonka pituus on lyhin mahdollinen. Valitaan koordinaatisto siten, että a on positiivisella x -akselilla. Olkoon vektori b lyhin mahdollinen hilan H vektori, joka ei ole vektorin a suuntainen ja sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä (positiivinen y -akseli mukaan luettuna). Nyt vektorit a ja b virittävät hilan H , joka voidaan luokitella vektoreiden muodostaman kolmion mukaan.

Jos $a \perp b$ ja $|a| = |b|$, hila on *neliöhila*. Tällöin hilan muodostuu nimensä mukaan neliöistä, eli kaikki tapettiryhmän siirrot ovat yhtä suuria ja tapahtuvat joko x - tai y -akselin suuntaan. Neliöhila nähdään kuvassa 3.4.



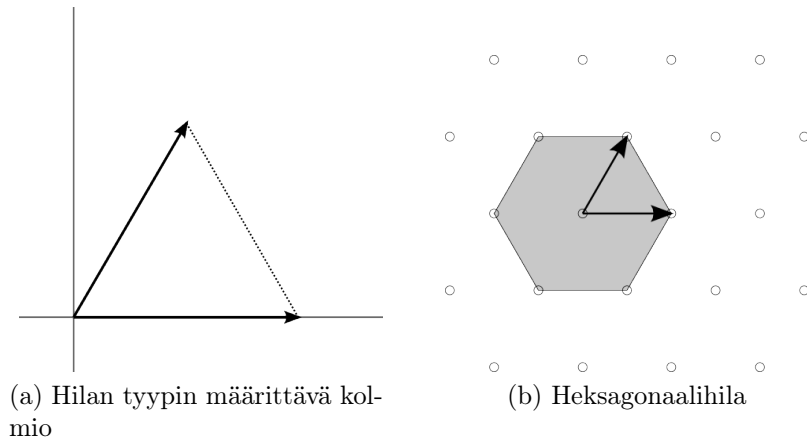
Kuva 3.4: Neliöhila

Jos $a \perp b$ ja kolmio oab ei ole tasakylkinen, hila on *suorakulmihila*. Hilan tyypin määrittämä suorakulmio muodostuu hilan virittäjävektoreista kuten neliöhilan tapauksessa ja myös tämän hilan siirrot ovat pysty- tai vaakasuuntaisia, mutta niiden ei tarvitse olla yhtä suuria. Suorakulmihila nähdään kuvassa 3.5.



Kuva 3.5: Suorakulmionhila

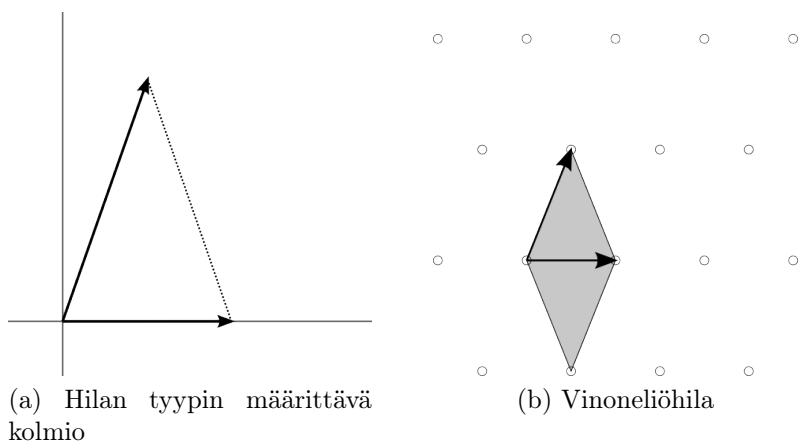
Jos kolmio oab on tasasivuinen (ja näin ollen ei ole suorakulmainen), hila on *heksagonaalihila*, sillä kuusi tasasivuista kolmiota muodostavat kuusikulmion, kuten nähdään kuvassa 3.6. Tässä hilassa toisen virittäjävektorin b vaakasuuntainen komponentti on tasan puolet ensimmäisestä virittäjävektorista a . Lisäksi molemmat virittäjävektorit ovat yhtä pitkiä ja virittäjävektorien välinen kulma on $\frac{\pi}{3}$.



Kuva 3.6: Heksagonaalihila

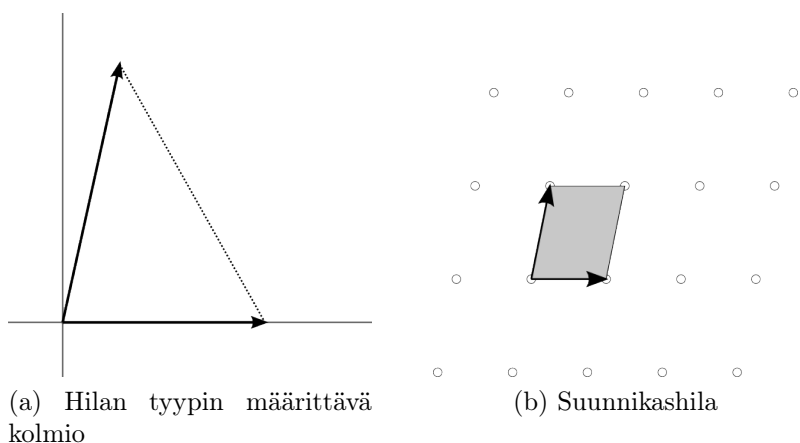
Jos kolmio on tasakylkinen ja $|a| < |b|$, kyseessä on *vinoneliöhila*. Hilan nimessä esiintyvä vinoneliö rakentuu kahdesta virittäjävektorien muodostamasta tasakylkisestä kolmiosta, kuten nähdään kuvassa 3.7. Vinoneliöhilassa, kuten heksagonaalihilassakin, toisen virittäjävektorin b vaakasuuntainen komponentti on puolet ensimmäisestä virittäjä-

vektorista a . Vinoneliöhilan virittäjävektorit eivät kuitenkaan ole saman pituisia ja niiden välinen kulma ei ole suora eikä $\frac{\pi}{3}$.



Kuva 3.7: Vinoneliöhila

Viimeinen hilatyyppi sisältää kaikki tapaukset, jotka eivät kuulu mihinkään edellä olevista. Tällöin kyseessä on *suunnikashila*. Tällöin kolmio oab ei ole suorakulmainen ja $|a| \neq |b|$. Suunnikashilassa ei myöskään päde $2b - a \perp a$ kuten vinoneliö- ja heksagonaalihiloissa. Vinoneliöhila nähdään kuvassa 3.7.



Kuva 3.8: Suunnikashila

Luku 4

Tapettiryhmät

Tässä luvussa käymme läpi ja nimeämme kaikki seitsemäntoista tapettiryhmää ja näytämme, että muita tapettiryhmiä ei voi olla olemassa. Edellisessä luvussa osoitettiin, että hilat ovat yhtä viidestä perustyyppistä, joten käymme läpi jokaisen hilatyypin yksi kerrallaan. Ensin tarkastelemme minkälaisia kuvauksia tapettiryhmän pisteryhmä voi sisältää, kun hilatyypin on valittu. Tämän jälkeen valitaan yksi kerrallaan jokin mahdollisista pisteryhmistä ja tarkastellaan, minkälaisia kuvauksia tapettiryhmään voi tällöin kuulua. Kun olemme saaneet kattavan kuvan siitä miltä ryhmä näyttää, annamme sille nimen. Seuraavassa luvussa todistetaan, että mitkään nimeämistämme ryhmistä eivät ole isomorfisia keskenään. Tarkastelu pohjautuu Armstrongin [1] lukuun 26, mutta käymme jokaisen tapettiryhmän läpi hieman kyseistä lukua tarkemmin.

Käytetään koko tässä luvussa merkintöjä G tapettiryhmälle, P sen pisteryhmälle ja H siirtohilalle. Vektorit a ja b ovat sellaiset hilan H virittävät vektorit, että a on lyhin mahdollinen ja b on lyhin ensimmäisessä neljänneksessä sijaitseva vektori, kun x -akseli on valittu kulkemaan vektorin a suuntaisesti. Käytetään myös termiä *aito liukupeilaus* tarkoittamaan liukupeilausta, jota ei voida kirjoittaa siirtohilan siirron ja peilauksen yhdisteenä.

Kappaleen kuvissa käytetään yhtenäistä paksua viivaa merkitsemään peilauksen peilausakselia ja katkoviivaa merkitsemään liukupeilauksen peilausakselia. Lisäksi käytetään ympyrää, neliötä, kolmiota ja tähteä merkitsemään puolikierron, neljänneskierron, kolmanneskierron ja kuudenneskierron kiertokeskuksia. Merkit on esitelty kuvassa 4.1.

Suunnikashila

Lähdetään tutkimaan minkälaisia kuvauksia pisteryhmä saattaa sisältää, kun siirtohila on tyypiltään suunnikashila. Olkoon siis H on suunnikashila. Pisteryhmän määritelmän

————	Peilaus
-----	Liukupeilaus
○	Puolikierto
□	Neljänneskierto
△	Kolmanneskierto
☆	Kuudenneskierto

Kuva 4.1: Kuvien merkkien selitykset

mukaan sen alkioit ovat ortogonaalisia kuvauksia ja lauseen 2.10 mukaan ne ovat siis kiertoja origon ympäri tai peilauksia origon kautta kulkevan peilausakselin suhteen. Olkoon $\delta \in P$, jolloin δ säilyttää vektorien pituuden. Nelikulmihilan virittäjävektoreille a ja b pätee $|a| < |b|$ ja lauseen 3.7 mukaan siirtohilan pisteiden on kuvauduttava siirtohilan pisteille, joten $\delta(a) = \pm a$. Täten δ voi olla joko identtinen kuvaus I , puolikierto R_π tai peilaus pystyakselin suhteen eli M_π .

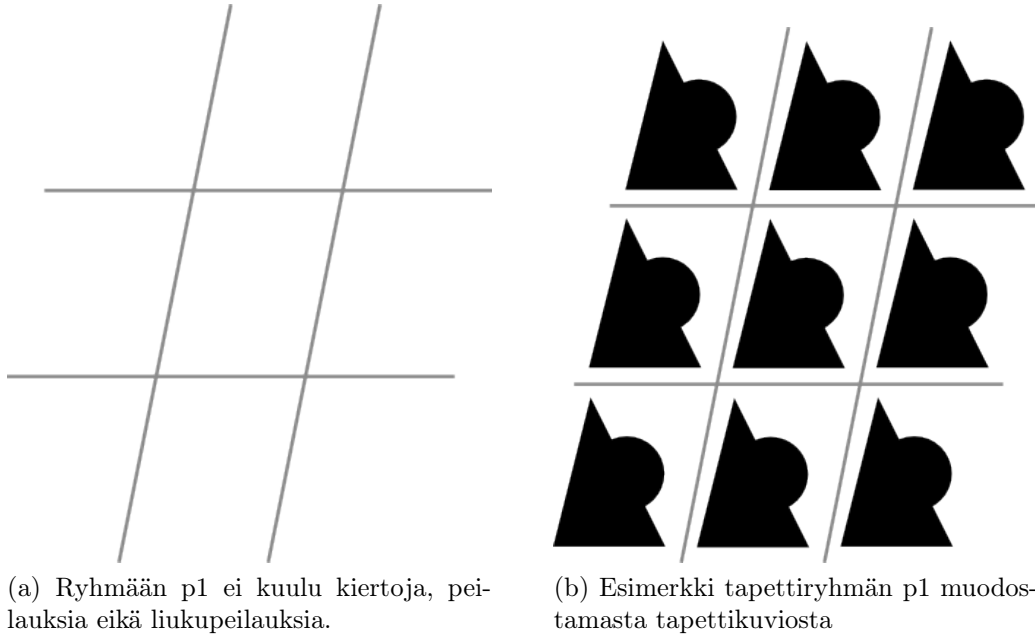
Näytetään, että kun hilaksi on valittu suunnikashila, tapettiryhmään ei voi kuulua peilausta pystyakselin suhteen. Oletetaan, että δ on peilaus pystyakselin suhteen. Vektori a on x -akselin suuntainen ja b on ensimmäisessä neljänneksessä, joten $\delta(b) = b + \alpha a$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$. Lauseen 3.7 mukaan δ säilyttää siirtohilan muuttumattomana, joten $\delta(b) \in H$. Täten $\alpha \in \mathbb{Z}$. Koordinaatisto on valittu siten, että a sijaitsee positiivisella x -akselilla, joten $\alpha \leq 0$. Jos $\alpha = 0$, vektori b on peilausakselin suuntainen, eli kohtisuorassa vektoria a vastaan. Tällöin kyseessä on suorakulmihila, mikä on ristiriita. Jos $\alpha = -1$, niin $b - \delta(b) = a$, eli vektorin b vaakasuora komponentti on puolet vektorista a . Tällöin kyseessä on vinoneliöhila, joka on ristiriita. Jos $\alpha < -1$, vektori $b - a$ sijaitsee koordinaatiston ensimmäisestä neljänneksessä, joten b ei ole lyhin ensimmäisen neljänneksen vektoreista, jotka virittävät hilan H . Tämä on ristiriidassa vektorin b valinnan kanssa. Täten tapettiryhmän pisteryhmään ei voi kuulua peilausta pystyakselin suhteen, kun siirtohila on tyypiltään suunnikashila.

Pisteryhmän on näin ollen oltava ryhmän $\{I, R_\pi\}$ aliryhmä. Kahden alkion ryhmällä on vain kaksi aliryhmää, triviaalit aliryhmät. Kumpikin tuottaa erilaisen tapettiryhmän.

p1

Valitaan ensin pisteryhmäksi $P = \{I\}$. Lauseen 3.6 mukaan tapettiryhmän kuvaukset ovat tällöin muotoa (I, v) , jossa v on siirto. Täten kaikki tämän ryhmän kuvaukset ovat

siirtoja. Tapettiryhmän määritelmän mukaan tapettiryhmän siirrot koostuvat siirtohilan vektoreista ja siirtohilaksi on valittu suunnikashila, joten kaikki ryhmän kuvaukset tunnetaan. Kutsutaan tätä ryhmää nimellä $p1$. Kuvassa 4.2 nähdään esitys kaikista ryhmän kuvauksista, eli tässä tapauksessa ainoastaan siirtojen muodostama suunnikashila, sekä esimerkki ryhmän $p1$ muodostamasta tapettikuvioista.



Kuva 4.2: Tapettiryhmä $p1$

$p2$

Valitaan sitten pisteryhmäksi $P = \{I, R_\pi\}$. Tällöin tapettiryhmään kuuluu siirtojen lisäksi myös puolikiertoja (R_π, v) joillakin $v \in \mathbb{R}^2$. Valitaan origoksi sellainen piste, että $(R_\pi, 0) \in G$. Tutkitaan minkälaisia kuvauksia tapettiryhmä voi sisältää.

Siirtohilan määritelmän mukaan kaikki sen alkiot kuuluvat tapettiryhmään. Täten tapettiryhmään kuuluvat myös kaikki kuvaukset $(I, ma + nb) \circ (R_\pi, 0) = (R_\pi, ma + nb)$. Koska puolikierto kuvaa kaikki vektorit vastavektoreilleen, $(R_\pi, ma + nb) = (R_\pi, c - R_\pi c)$, jossa $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $c = \frac{1}{2}(ma + nb)$. Luvussa 2.2 nähtiin, että tällainen kuvaus on kierto, jonka kiertokeskus on c . Tapettiryhmään siis kuuluvat kaikki puolikierrat, joiden kierto-keskukset sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä.

Näytetään, että tapettiryhmään ei voi kuulua muunlaisia puolikiertoja. Olkoon $(R_\pi, c - R_\pi c)$ tapettiryhmään kuuluva puolikierto. Sen kiertokeskus on $c = \alpha a + \beta b$ joillakin

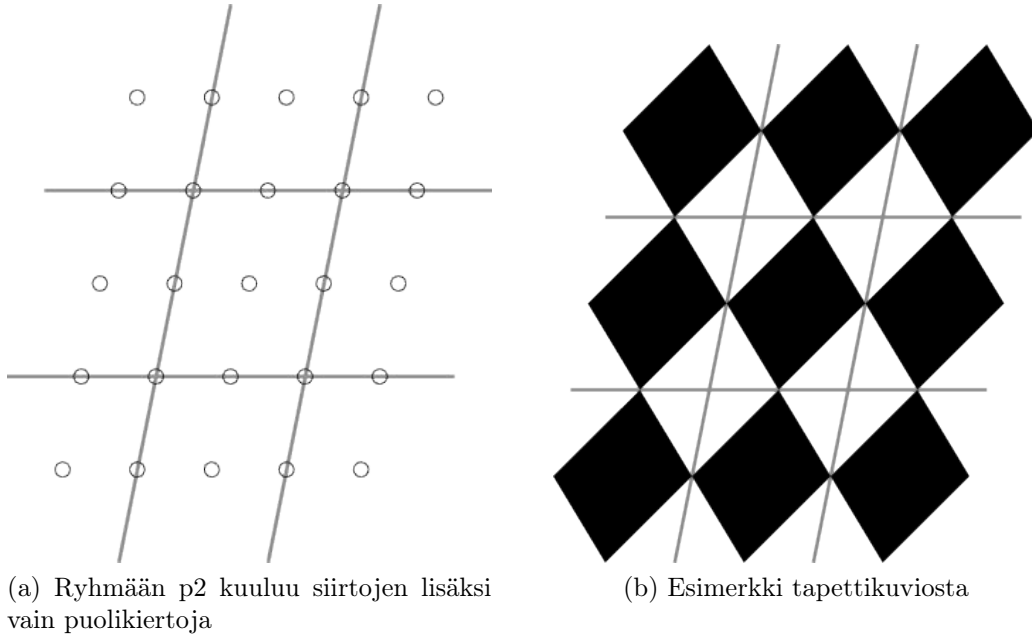
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tämä kierto voidaan kirjoittaa muodossa

$$(R_\pi, c - R_\pi c) = (R_\pi, \alpha a + \beta b - R_\pi(\alpha a + \beta b)) = (I, 2(\alpha a + \beta b)) \circ (R_\pi, 0).$$

Koska kuvaus $(R_\pi, 0)$ kuuluu tapettiryhmään, kuuluu tapettiryhmään myös yhdistetty kuvaus $(R_\pi, c - R_\pi c) \circ (R_\pi, 0) = (I, 2(\alpha a + \beta b))$. Tämä kuvaus on siirto, joten $2\alpha a + 2\beta b$ on siirtohilan vektori ja näin ollen $2\alpha, 2\beta \in \mathbb{Z}$. Tapettiryhmään kuuluvat kierrot ovat siis yllä mainitun kaltaisia.

Lauseen 3.6 mukaan jokainen tapettiryhmän kuvaus voidaan esittää pisteryhmän kuvauksen ja siirron yhdisteenä, joten tapettiryhmään ei voi kuulua muita kuvauksia kuin siirtoja ja puolikiertoja.

Kuva 4.3 näyttää kuinka kiertokeskukset sijaitsevat suhteessa siirtohilaan ja tarjoaa esimerkin ryhmän muodostamasta tapettikuviosta. Kutsutaan tätä ryhmää nimellä $p2$.



Kuva 4.3: Tapettiryhmä $p2$

Olemme nyt nähneet, että nelikulmiohila mahdollistaa vain kahdenlaisia pisteryhmiä. Kumpaakin pisteryhmää vastaa yksi tapettiryhmä ja muunlaiset tapettiryhmät eivät ole mahdollisia, jos siirtohila on nelikulmiohila.

Suorakulmiohila

Tutkitaan suorakulmiohilan tapaus kuten nelikulmiohilankin. Olkoon H suorakulmiohila, jolle siis pätee $a \perp b$ ja $|a| < |b|$. Olkoon $\delta \in P$, jolloin lauseen 2.10 mukaan δ on kierto tai peilaus. Lauseen 3.7 mukaan pisteryhmän kuvaukset säilyttävät siirtohilan muuttumattomana, joten $\delta(a) = \pm a$ ja $\delta(b) = \pm b$. Täten jos δ on kierto, sen on oltava identtinen kuvaus tai puolikierto. Jos δ on peilaus, sen on oltava peilaus joko pysty- tai vaaka-akselin suhteen. Pisteryhmän on siis oltava ryhmän $\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$ aliryhmä, joita on viisi erilaista. Jos $P = \{I\}$ tai $P = \{I, R_\pi\}$, saadaan suunnikashilan kanssa isomorfiset tapaukset.

pm

Olkoon $P = \{I, M_0\}$, jolloin pisteryhmän määritelmän mukaan $(M_0, v) \in G$ jollakin $v \in \mathbb{R}^2$. Täten on mahdollista, että kuvaus $(M_0, 0)$ kuuluu tai on kuulumatta tapettiryhmään.

Oletetaan, että kuvaus $(M_0, 0)$ kuuluu tapettiryhmään, jolloin myös $(M_0, ma + nb) \in G$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Havaitaan, että $(M_0, ma + nb) = (I, ma) \circ (M_0, nb)$ ja $(I, ma) \in G$, joten $(M_0, nb) \in G$. Luvun 2.2 mukaan kuvaus (M_0, nb) on peilaus, jonka peilausakseli on x -akselin suuntainen ja vektorin $\frac{1}{2}nb$ etäisyydellä origosta.

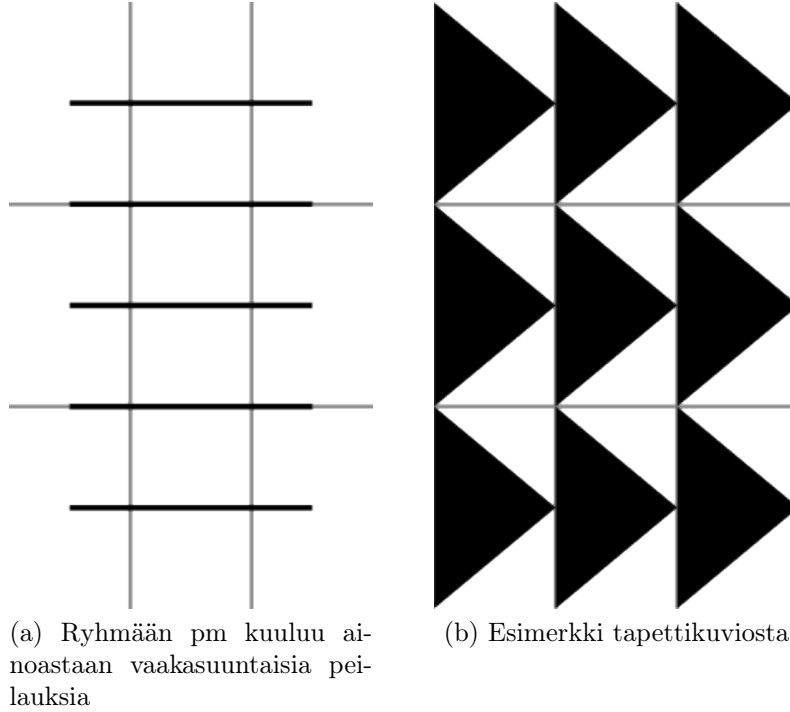
Koska n voidaan valita kokonaislukujen joukosta mielivaltaisesti, tapettiryhmä sisältää kaikki peilaukset, joiden peilausakseli on vaakasuorassa siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä.

Lauseen 3.6 mukaan kaikki tapettiryhmän kuvaukset ovat joko siirtoja tai vaakasuuntaisia peilauksia. Näytetään, että edellämainittujen peilausten lisäksi tapettiryhmään ei kuulu muita peilauksia. Oletetaan, että tapettiryhmään kuuluu peilaus $(M_0, (n + s)b)$, jossa $n \in \mathbb{Z}$ ja $s \in \mathbb{R}$ siten, että $0 < s < 1$. Tällöin tapettiryhmään kuuluu myös yhdistetty kuvaus $(I, -nb) \circ (M_0, (n + s)b) \circ (M_0, 0) = (I, sb)$. Tämä on ristiriita, sillä b on lyhin vektorin b suuntainen tapettiryhmän siirto. Täten tapettiryhmään kuuluvat ainoastaan peilaukset (M_0, nb) kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Ryhmän peilausakselit ja esimerkki tapettikuvioista nähdään kuvassa 4.4. Kutsutaan näin saatua ryhmää pm .

pg

Jatketaan pisteryhmän $P = \{I, M_0\}$ tarkastelua. Ryhmän pm tapauksessa oletettiin, että kuvaus $(M_0, 0)$ kuuluu tapettiryhmään. Oletetaan nyt, että kyseinen kuvaus ei kuulu tapettiryhmään. Pisteryhmään kuitenkin kuuluu peilaus M_0 , joten tapettiryhmässä on olemassa kuvaus $\varphi = (M_0, v)$ jollakin $v \in \mathbb{R}^2$. Lauseen 2.12 mukaan tämä kuvaus on peilaus tai liukupeilaus x -akselin suuntaisen suoran suhteen. Valitaan origo tältä peilausakselilta,



Kuva 4.4: Tapettiryhmä pm

jolloin $\varphi = (M_0, \alpha a)$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$. Kahden liukupeilauksen yhdiste on siirto, joten

$$\varphi^2 = (I, 2\alpha a) = (I, ka)$$

jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Täten $\varphi = (M_0, \frac{1}{2}ka)$. Jos k on parillinen, niin $(I, -\frac{1}{2}ka) \in G$, sillä se on siirto. Tällöin

$$(M_0, 0) = \left(M_0, \frac{1}{2}ka\right) \circ \left(I, -\frac{1}{2}ka\right) \in G,$$

mikä on vastoin oletusta. Näin ollen k on pariton, jolloin

$$\left(M_0, \frac{1}{2}a\right) = \left(I, -\frac{k-1}{2}a\right) \circ \left(M_0, \frac{1}{2}ka\right) \in G.$$

Ryhmään siis kuuluu x -akselin suuntainen liukupeilaus, jonka peilausakseli leikkaa origon ja jonka liu'un suuruus on $\frac{1}{2}a$.

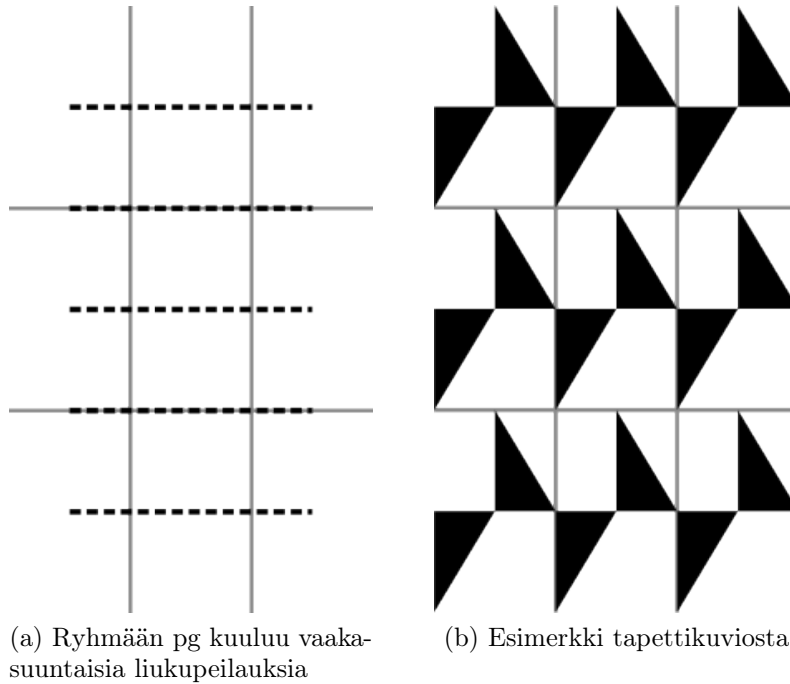
Tutkitaan, minkälaisia kuvauksia tapettiryhmään voi tämän perusteella kuulua. Tapettiryhmään kuuluvat kaikki liukupeilauksen $(M_0, \frac{1}{2}a)$ ja siirtojen yhdisteet. Olkoot

$m, n \in \mathbb{Z}$, jolloin yhdistetty kuvaus

$$(I, ma + nb) \circ \left(M_0, \frac{1}{2}a \right) = \left(M_0, \frac{1}{2}a + ma + nb \right) = \left(M_0, 2 \left(\frac{1}{2}nb \right) + \left(m + \frac{1}{2} \right) a \right).$$

Tämä on luvun 2.2 mukaan liukupeilaus, jonka peilausakseli on $|\frac{1}{2}b|$ monikerran päässä origosta ja joiden liu'un suuruus on $(m + \frac{1}{2})a$. Koska m ja n voidaan valita vapaasti, tapettiryhmä sisältää kaikki tällaiset liukupeilaukset.

Näytetään lopuksi, että tapettiryhmään ei kuulu muita kuvauksia. Käyttämällä lausetta 3.6 nähdään, että kaikki tapettiryhmän kuvaukset ovat joko siirtoja tai vaakasuuntaisia (liuku)peilauksia. Olkoon $(M_0, \alpha a + \beta b)$ tapettiryhmän (liuku)liukupeilaus joillakin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tämä voidaan esittää muodossa $(I, (\alpha - \frac{1}{2})a + \beta b) \circ (M_0, \frac{1}{2}a)$. Yhdistetyn kuvauksen ensimmäinen termi on siirto, joten se kuuluu siirtohilaan ja näin ollen $\alpha - \frac{1}{2}, \beta \in \mathbb{Z}$. Täten kuvaus on yllä esitetyn kaltainen liukupeilaus ja muut liukupeilaukset tai peilaukset eivät ole tapettiryhmässä mahdollisia. Kutsutaan tätä ryhmää pg . Se nähdään kuvassa 4.5.



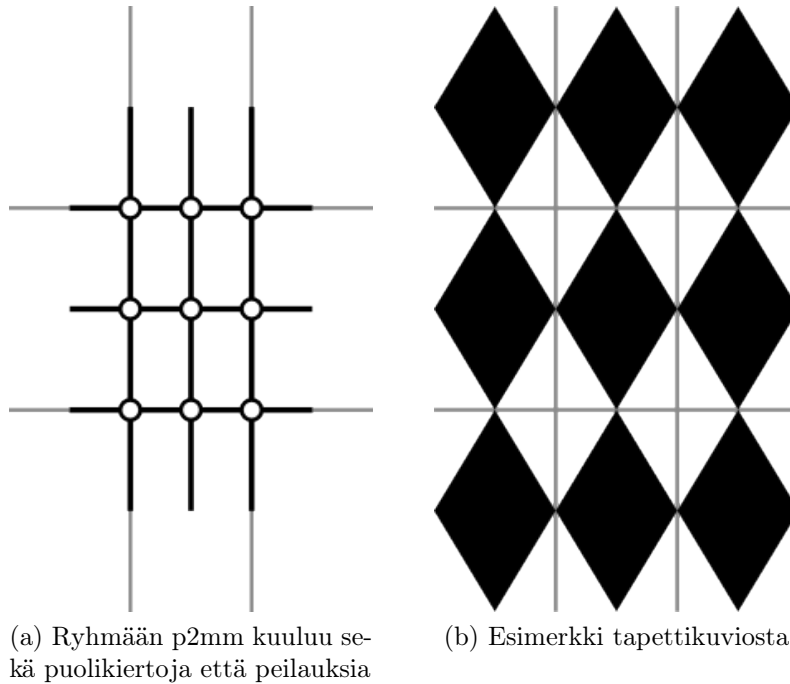
Kuva 4.5: Tapettiryhmä pg

Jos pisteryhmäksi valitaan $\{I, M_\pi\}$, saadaan uudelleen ryhmät pm ja pg , sillä peilauksen M_π akseli on myös hilan virittäjävektorin suuntainen ja ryhmät vastaavat toisiaan kun x - ja y -akselit vaihdetaan keskenään.

p2mm

Oletetaan sitten, että pisteryhmä on koko ryhmä $\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$ ja tutkitaan jälleen miltä näin saatu ryhmä näyttää. Nyt jäljelle jää neljä tapausta riippuen siitä kuuluvatko M_0 tai M_π tapettiryhmään. Näistä tapauksista kaksi (ne joissa vain toinen peilauksista kuuluu tapettiryhmään) ovat isomorfisia keskenään aivan kuten ryhmän pisteryhmien $\{I, M_0\}$ ja $\{I, M_\pi\}$ tapauksessakin. Jäljelle jää siis kolme tapausta.

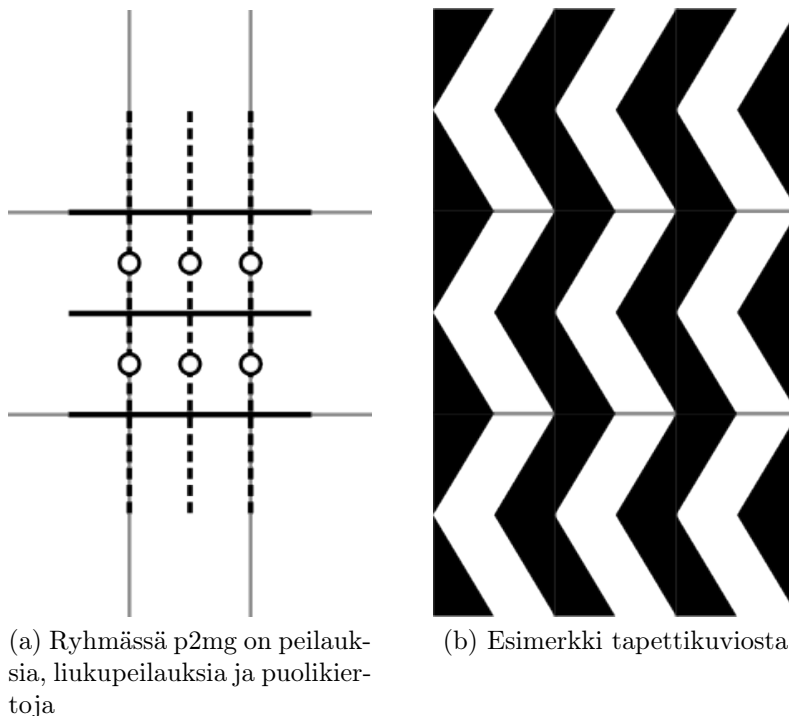
Oletetaan ensin, että molemmat peilaukset kuuluvat tapettiryhmään. Peilaukset tapahtuvat x - ja y -akselin suuntaisten suorien suhteen. Valitaan origoksi peilaussuorien leikkauspiste. Lauseen 2.13 mukaan yhdistetty kuvaus $(M_0, 0) \circ (M_\pi, 0) = (R_\pi, 0)$, joten myös R_π kuuluu tapettiryhmään. Aivan kuten ryhmän p2 tapauksessakin, tapettiryhmään kuuluvat kaikki puolikierrat, joiden kiertoakeskukset sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä, mutta ei muita kiertoja. Tapettiryhmän peilausten peilausakselit ovat vaaka- tai pystysuuntaisia ja myös ne sijaitsevat pistehilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä. Peilausakselit löydetään samoin kuin ryhmän pm tapauksessa. Näin saatua ryhmää kutsutaan nimellä $p2mm$ ja se nähdään kuvassa 4.6.



Kuva 4.6: Tapettiryhmä p2mm

p2mg

Oletetaan seuraavaksi, että $M_0 \in G$ ja $M_\pi \notin G$. Valitaan jälleen origoksi jokin peilausakselien leikkauspiste. Löydämme tapettiryhmään kuuluvat peilaukset kuten ryhmän pm tapauksessa. Ne ovat vaakasuuntaisia ja sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä. Tapettiryhmän liukupeilaukset puolestaan löydetään samoin kuin ryhmän pg tapauksessa. Ne ovat tällä kertaa pystysuuntaisia, mutta nekin sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä. Liukupeilausten liu'un suuruus on $\frac{1}{2}b$. Lisäksi korollaari 2.14 kertoo, että ryhmä sisältää puolikierron, joiden kiertokeskus on liukupeilausakselien päällä ja peilausakselien puolella välissä. Samoin kuin ryhmän $p2$ tapauksessa voidaan näyttää, että ryhmään ei kuulu muita puolikiertoja. Tämä ryhmä on $p2mg$ ja se nähdään kuvassa 4.7.

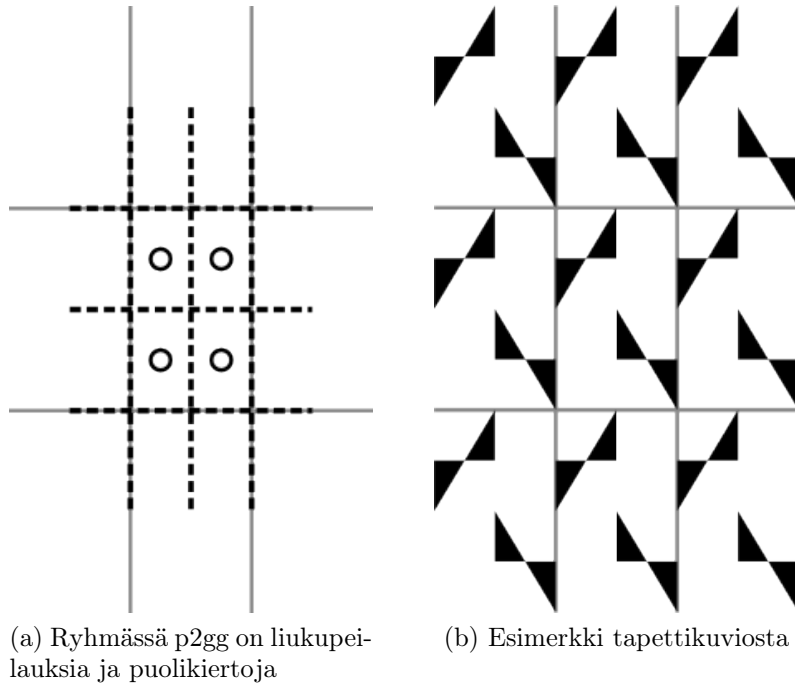


Kuva 4.7: Tapettiryhmä $p2mg$

p2gg

Viimeisenä tapauksena oletetaan, että kumpikaan peilauksista ei sisälly pisteryhmään. Valitaan jälleen origoksi peilausakselien leikkauspiste. Käytetään samanlaista päättelyä

kuin ryhmän pg tapauksessa, jolloin nähdään, että tämä ryhmä sisältää pysty- ja vaakasuuntaisia liukupeilauksia, joiden peilausakselit sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolella välissä. Liukupeilausten liu'un suuruus on vaakasuuntaisissa peilauksissa $\frac{1}{2}a$ ja pystysuuntaisissa peilauksissa $\frac{1}{2}b$ verran. Lisäksi ryhmään kuuluvat korollaan 2.14 mukaan puolikierrat, joiden kiertokeskukset sijaitsevat peilausakselien leikkauspisteiden puolella välissä. Ryhmään ei kuulu muita kiertoja, mikä voidaan näyttää samalla tavalla kuin ryhmän $p2$ kiertoja tarkasteltaessa. Tämä ryhmä on $p2gg$ ja se nähdään kuvassa 4.8.



Kuva 4.8: Tapettiryhmä $p2gg$

Vinoneliöhila

Jatketaan tarkastelua samoin kuin aikasemminkin. Olkoon nyt H vinoneiliöhila. Ortogonaaliset kuvaukset, jotka säilyttävät vinoneliöhilan, ovat identtinen kuvaus, R_π , M_π ja M_0 kuten suorakulmionhilan tapauksessakin. Tapaukset $P = \{I\}$ ja $P = \{I, R_\pi\}$ tuottavat samanlaisen tapettiryhmän kuin aikaisemminkin. Kaksi uutta tapausta kuitenkin löytyy. Paljastuu nimittäin, että vinoneiliöhilan tapauksessa pisteryhmään kuuluva peilaus generoi sekä peilauksia että liukupeilauksia.

cm

Olkoon pisteryhmä $P = \{I, M_0\}$. Oletetaan, että $M_0 \in G$. Valitaan origo peilausakselilta, jolloin $(M_0, 0) \in G$. Havaitaan, että vektorit $c = b - \frac{1}{2}a$ ja a ovat keskenään kohtisuorassa. Tällöin tapettiryhmään kuuluvat kuvaukset $(M_0, ma + nb) = (M_0, \frac{2m+n}{2}a + nc)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Nämä ovat liukupeilauksia, joiden peilausakselit ovat vaakasuorassa vektorin $\frac{1}{2}nc$ etäisyydellä origosta. Jos n on parillinen sekä vektorin a että c kertoimet ovat kokonaislukuja, jolloin kyseessä on tavallinen peilaus yhdistettynä siirtoon. Jos n on pariton, kyseessä on aito liukupeilaus, jonka liu'un suuruus on $(m + \frac{n}{2})a$.

Oletetaan sitten, että $M_0 \notin G$. Valitaan jälleen origo peilausakselilta, jolloin $(M_0, \alpha a) \in G$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuten ryhmän pg tarkastelussa, havaitaan nytkin, että $(M_0, \frac{1}{2}a) \in G$. Tapettiryhmään siis kuuluvat kaikki liukupeilaukset $(M_0, (\frac{1}{2} + m)a + nb)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $(M_0, \frac{1}{2}(2m + n + 1)a + nc)$. Jos n on pariton, $\frac{1}{2}(2m + n + 1) = p \in \mathbb{Z}$, jolloin kyseessä on peilaus yhdistettynä siirtoon (I, pa) . Tämän peilausakseli on etäisyydellä $|\frac{1}{2}nc|$ origosta. Jos n on parillinen, kyseessä on siirron ja liukupeilauksen yhdiste $(I, \frac{1}{2}(2m + n)a) \circ (M_0, \frac{1}{2}a + nc)$. Tällöin liukupeilauksen peilausakseli on etäisyydellä $|\frac{1}{2}nc|$ origosta.

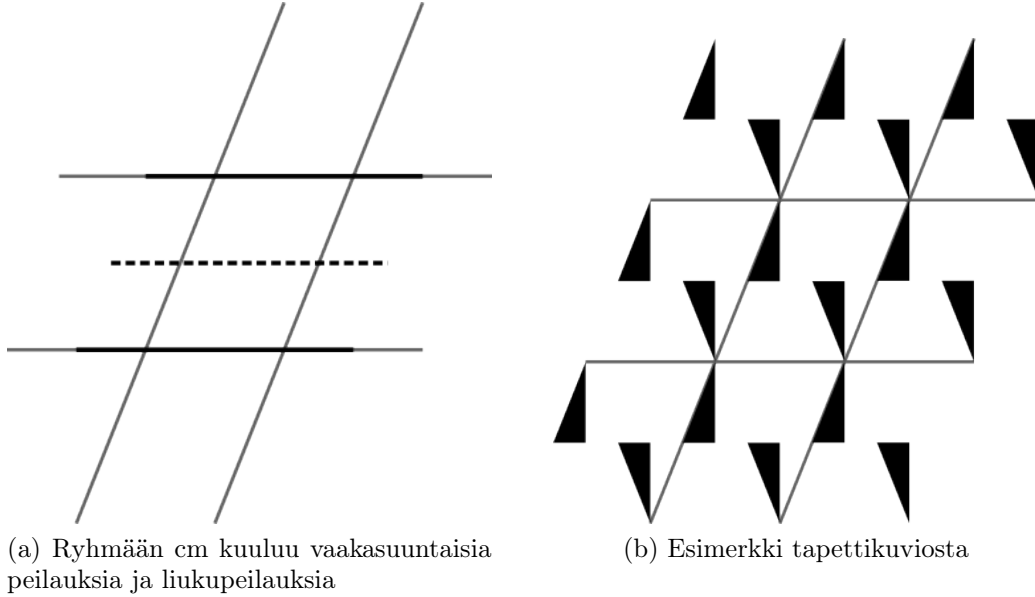
Molemmissa tapauksissa tapettiryhmään kuuluu (vaakasuuntaisia) peilauksia ja liukupeilauksia, joiden peilausakselit vuorottelevat ja ovat vektorin $\frac{1}{2}c$ päässä toisistaan. Tapaukset ovat siis origon valintaa vailla identtiset ja näin ollen isomorfiset. Kummassakin tapauksessa voidaan vastaavasti kuin ryhmien pm ja pg tapauksissa näyttää, että tapettiryhmään ei kuulu muita peilauksia eikä liukupeilauksia. Kutsutaan tätä ryhmää cm . Jälleen kerran vastaavaan tulokseen päästään, jos pisteryhmäksi valitaan $P = \{I, M_\pi\}$. Ryhmä nähdään kuvassa 4.9.

c2mm

Kun valitaan pisteryhmäksi koko ryhmä $\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$, saadaan edellisen tapauksen kaltaisella päättelyllä (kahdessa ulottuvuudessa) todistettua, että pisteryhmän kierto ja molemmat peilaukset kuuluvat tapettiryhmään. Tässä ryhmässä peilaukset vuorottelevat sekä vaaka- että pystysuunnassa ja peilausakseleiden väli on vaakasuunnassa vektorin $\frac{1}{4}a$ ja pystysuunnassa vektorin $\frac{1}{2}c$ pituinen. Kiertokeskukset löytyvät kuten ryhmien p2mm, p2mg ja p2gg tapauksissakin ja ne sijaitsevat peilausakselien leikkauskohdissa ja liukupeilausakselien leikkauskohdissa. Näin saatu ryhmä on $c2mm$ ja se nähdään kuvassa 4.10.

Neliöhila

Olkoon H neliöhila, jolloin $a \perp b$ ja $|a| = |b|$. Olkoon δ ortogonaalinen kuvaus, joka säilyttää siirtohilan muuttumattomana. Tällöin $\delta(a) \in \{a, b, -a, -b\}$. Jos δ on peilaus,



Kuva 4.9: Tapettiryhmä cm

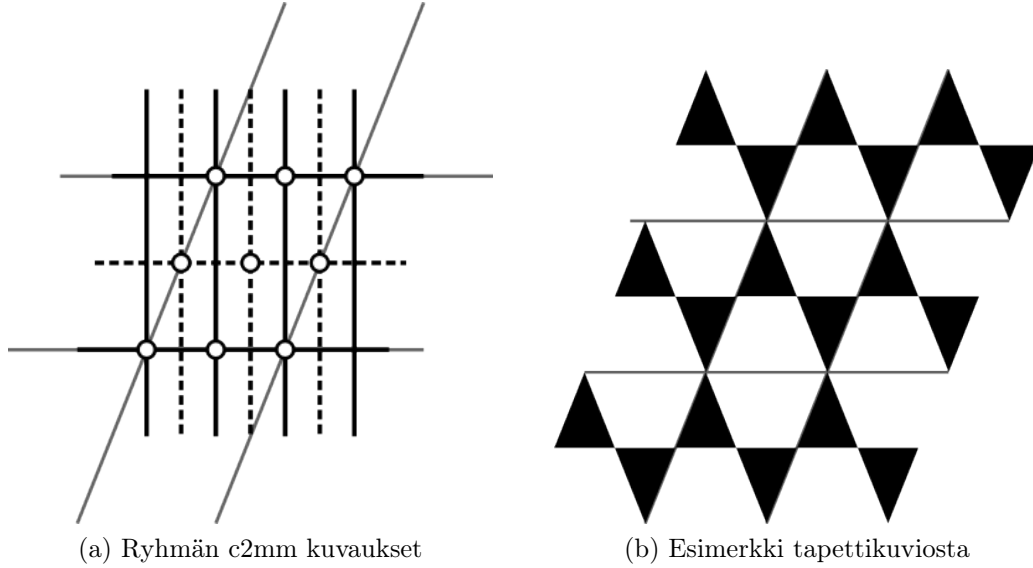
pätee $\delta \in \{M_0, M_{\frac{\pi}{2}}, M_{\pi}, M_{\frac{3\pi}{2}}\}$, ja jos δ on kierto, pätee $\delta \in \{I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}\} = \langle R_{\frac{\pi}{2}} \rangle$. Havaitaan, että $M_{\frac{\pi}{2}} = M_0 \circ R_{\frac{3\pi}{2}}$, $M_{\pi} = M_0 \circ R_{\pi}$ ja $M_{\frac{3\pi}{2}} = M_0 \circ R_{\frac{\pi}{2}}$, joten hilan säilyttävät ortogonaaliset kuvaukset muodostavat kuvausten M_0 ja $R_{\frac{\pi}{2}}$ virittämän diedriryhmän $\langle R_{\frac{\pi}{2}}, M_0 \rangle$. Pisteryhmän on oltava tämän ryhmän aliryhmä. Jos pisteryhmässä ei ole mukana kuvausta $R_{\frac{\pi}{2}}$, saadaan jokin jo esitetyistä tapettiryhmistä. Tutkitaan siis tapauksia, joissa neljänneksenkierto kuuluu pisteryhmään.

p4

Olkoon pisteryhmä $P = \langle R_{\frac{\pi}{2}} \rangle$. Origoksi valitaan luonnollisesti näiden kiertojen kiertokeskus. Tällöin tapettiryhmään kuuluvat kuvaukset $(R_{\theta}, ma + nb)$, jossa $R_{\theta} \in P$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$. Tällaiset kuvaukset voidaan kirjoittaa muodossa $(R_{\theta}, c - R_{\theta}c)$ jollakin $c \in \mathbb{R}^2$, jossa c on jälleen kiertokeskus. Neljänneškierron tapauksessa $c = \frac{m-n}{2}a + \frac{m+n}{2}b$.

Oletetaan, että $m - n$ on parillinen, eli $m - n = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $m + n = 2(k + n)$, eli myös $m + n$ on parillinen. Päättely toimii vastaavasti myös toiseen suuntaan, eli $m - n$ on parillinen jos ja vain jos $m + n$ on parillinen. Täten kiertokeskuksen c koordinaatit ovat joko molemmat tasalukuja tai kumpikaan ei ole. Näin ollen neljänneškierrosten kiertokeskukset sijaitsevat joko siirtohilan pisteiden päällä, tai pisteessä $\frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}qb$ joillakin parittomilla $p, q \in \mathbb{Z}$. Samaan tulokseen päästään, jos kierron suuruus on $\frac{3\pi}{2}$.

Puolikierron tapauksessa $c = \frac{1}{2}(ma + nb)$. Tällöin kiertokeskus on pisteessä $\frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}qb$,



Kuva 4.10: Tapettiryhmä c2mm

jossa $p, q \in \mathbb{Z}$. Tämä pitää sisällään myös edellisen tapauksen kiertokeskukset, eli jokainen neljänneskierron kiertokeskus on myös puolikierron kiertokeskus. Muita kuvauksia ei tässä ryhmässä ole, mikä nähdään samanlaisella todistuksella kuin ryhmän p2 tapauksessa. Ryhmä nähdään kuvassa 4.11. Kutsutaan tätä ryhmää $p4$.

p4mm

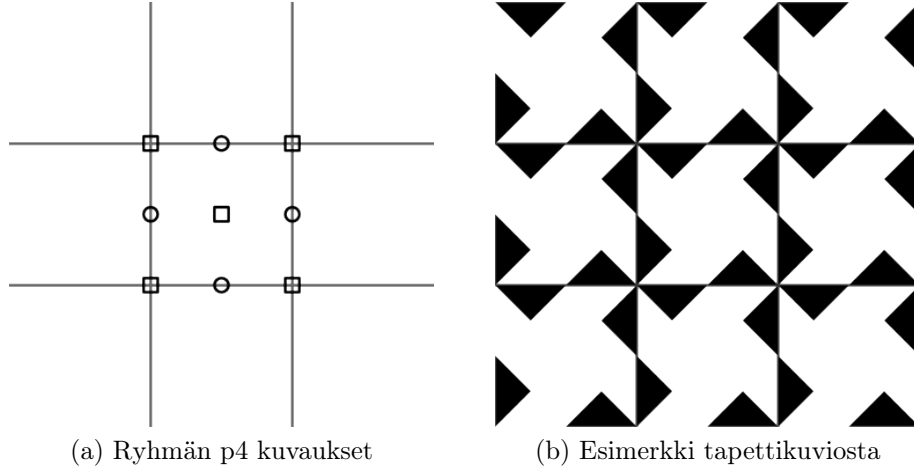
Kun pisteryhmäksi valitaan koko diedriryhmä, saadaan kaksi uutta ryhmää. Olkoon $P = \langle R_{\frac{\pi}{2}}, M_0 \rangle$. Valitaan origoksi jonkin neljänneskäännöksen kiertokeskus, jolloin kaikki kierrot kuuluvat tapettiryhmään. Kaikkien kiertojen kiertokeskukset saadaan kuten ryhmän p4 tapauksessa. Tapettiryhmään kuuluu peilaus $(M_0, \alpha a + \beta b)$ joillakin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja näin ollen myös $(M_0, \alpha a + \beta b)^2 = (I, 2\alpha a) \in G$. Täten $2\alpha = k \in \mathbb{Z}$. Oletetaan, että k on parillinen. Tällöin

$$(I, -\frac{1}{2}ka) \circ (M_0, \alpha a + \beta b) = (M_0, \beta b)$$

ja yhdistetty kuvaus

$$(R_{\frac{3\pi}{2}}, 0) \circ (M_0, \beta b) = (R_{\frac{3\pi}{2}} M_0, R_{\frac{3\pi}{2}} \beta b) = (M_{\frac{3\pi}{2}}, \beta a) = (M_{\frac{3\pi}{2}}, \frac{\beta}{2}(a - b) + \frac{\beta}{2}(a + b))$$

kuuluvat tapettiryhmään. Jälkimmäisen viimeisessä muodossa on tärkeää havaita, että $a - b$ on peilausakselin suuntainen vektori ja $a + b$ on sen kanssa kohtisuorassa. Kahden



Kuva 4.11: Tapettiryhmä p4

liukupeilauksen yhdiste

$$(M_{\frac{3\pi}{2}}, \frac{\beta}{2}(a-b) + \frac{\beta}{2}(a+b))^2 = (I, \beta(a-b))$$

on siirto, joten $\beta \in \mathbb{Z}$. Täten peilaus

$$(M_0, 0) = (I, -\beta b) \circ (M_0, \beta b)$$

kuuluu tapettiryhmään ja kuten ryhmän pm tapauksessa, tapettiryhmään kuuluvat täten kaikki vaakasuorat peilaukset, joiden peilausakseli on siirtohilan pisteiden päällä tai niiden puolessa välissä. Pystysuora peilaus $(M_\pi, 0) = (R_\pi, 0) \circ (M_0, 0)$ kuuluu kahden tapettiryhmän alkion tulona tapettiryhmään ja peilausakselit käyttäytyvät kuten vaakasuorien peilausten tapauksessa.

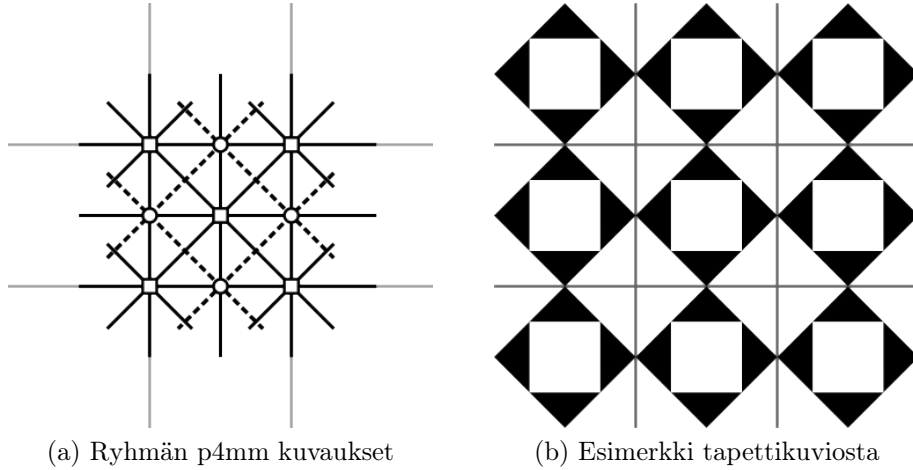
Vinot peilaukset $(M_{\frac{\pi}{2}}, 0) = (R_{\frac{\pi}{2}}, 0) \circ (M_0, 0)$ ja $(M_{\frac{3\pi}{2}}, 0) = (R_{\frac{3\pi}{2}}, 0) \circ (M_0, 0)$ kuuluvat myös tapettiryhmään, mutta ne generoivat tavallisten peilausten lisäksi liukupeilauksia. Kaikki muotoa $(M_{\frac{\pi}{2}}, ma + nb)$ olevat peilaukset kuuluvat tapettiryhmään. Kirjoitetaan $ma + nb$ yhdisteenä peilausakselin suuntaisesta ja sen kanssa kohtisuorassa olevasta vektorista, jolloin

$$(M_{\frac{\pi}{2}}, ma + nb) = (M_{\frac{\pi}{2}}, \frac{m-n}{2}(a-b) + \frac{m+n}{2}(a+b)).$$

Jos $m-n$ on parillinen, kyseessä on tavallinen peilaus yhdistettynä vektorin $a+b$ monikerran suuruiseen siirtoon. Näiden peilausten akselit ovat $\frac{1}{2}(a-b)p$ etäisyydellä origosta jollakin $p \in \mathbb{Z}$. Jos $m-n$ on pariton, saadaan liukupeilaus, jonka siirron suuruus on

$\frac{1}{2}(a+b)p$ ja jonka akseli sijaitsee etäisyydellä $|\frac{1}{4}(a-b)q|$ origosta joillakin parittomilla $p, q \in \mathbb{Z}$ arvolla. Toinen vaakasuora peilaus, $M_{\frac{3\pi}{2}}$, toimii vastaavalla tavalla.

Tässä ryhmässä on siis vaakasuoria peilauksia, joiden etäisyys toisistaan on vektorin $\frac{1}{2}a$ monikerta, ja pystysuoria peilauksia, joiden etäisyys toisistaan on vektorin $\frac{1}{2}b$ monikerta. Lisäksi ryhmässä on vinoja peilauksia ja liukupeilauksia, jotka vuorottelevat keskenään ja joiden etäisyys toisistaan on vektorin $\frac{1}{4}(a+b)$ tai $\frac{1}{4}(a-b)$ monikerta. Käyttämällä samaa periaatetta kuin ryhmien pm ja pg tapauksessa voidaan näyttää, että ryhmään ei kuulu muita peilauksia tai liukupeilauksia. Ryhmään kuuluvat myös neljänneskierrat, joiden kiertokeskukset ovat pisteissä $ma + nb$ tai $ma + nb + \frac{1}{2}(a+b)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$, sekä puolikierrat, joiden kiertokeskukset ovat pisteissä $\frac{1}{2}(ma + nb)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$. Muita kiertoja ei ole, mikä nähdään samoin kuin ryhmän p4 tapauksessa. Tämän ryhmän nimi on $p4mm$ ja se nähdään kuvassa 4.12.



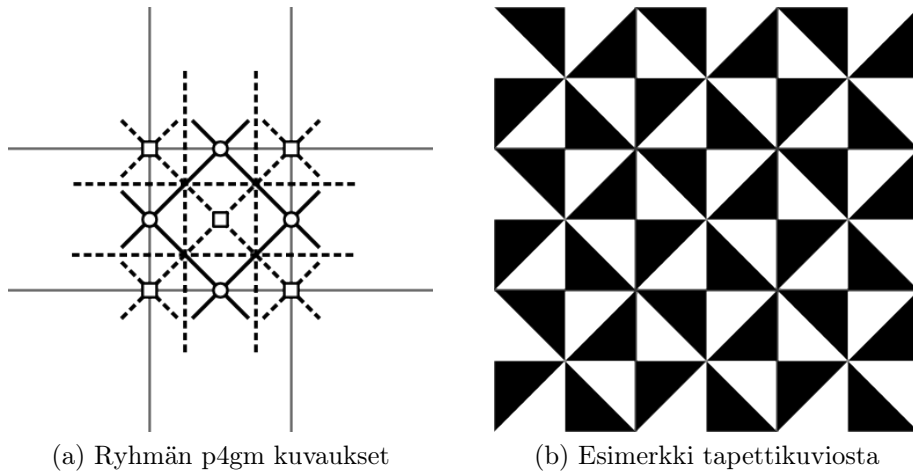
Kuva 4.12: Tapettiryhmä p4mm

p4gm

Toinen koko diedriryhmän generoima uusi tapettiryhmä saadaan kun edellisen tapauksen k on pariton. Kiertokeskukset ilmenevät kuten ryhmän p4mm tapauksessakin. Tällöin edellisen kaltaisella päättelyllä nähdään, että tapettiryhmään kuuluvat aidot liukupeilaukset $(M_0, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$, $(M_\pi, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$, $(M_{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}(a+b))$ ja $(M_{\frac{3\pi}{2}}, \frac{1}{2}(a-b))$.

Tapettiryhmään kuuluvat siis kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$ kuvaukset $(M_0, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + ma + nb)$. Nämä ovat aitoja liukupeilauksia, joiden liu'un suuruus on $m + \frac{1}{2}a$ ja joiden peilausakselin etäisyys origosta on $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + n)b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}pb$ jollakin $p \in \mathbb{Z}$. Pystysuorat peilaukset toimivat samalla tavalla.

Tapettiryhmään kuuluu myös kuvaus $(M_{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}(a+b) + ma + nb) = (M_{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}(m+n+1)(a+b) + \frac{1}{2}(m-n)(a-b))$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Jos $m+n$ on parillinen, kyseessä on aito liukupeilaus, jonka liu'un suuruus on $\frac{1}{2}p(a+b)$ jollakin parittomalla $p \in \mathbb{Z}$ ja jonka peilausakseli sijaitsee $|\frac{1}{2}(a-b)|$ monikerran päässä origosta. Jos $m+n$ on pariton, kyseessä on peilaus yhdistettynä siirtoon, jonka peilausakseli sijaitsee $|\frac{1}{4}p(a-b)|$ päässä origosta jollakin parittomalla $p \in \mathbb{Z}$. Muita kuvauksia ei ryhmässä ole, mikä voidaan todistaa kuten ryhmän $p4mm$ tapauksessakin. Tämän ryhmän nimi on $p4gm$. Vastaava tulos saadaan toiselle vinolle peilaukselle $M_{\frac{3\pi}{2}}$. Ryhmä $p4gm$ nähdään kuvassa 4.13.



Kuva 4.13: Tapettiryhmä $p4gm$

Heksagonaalihila

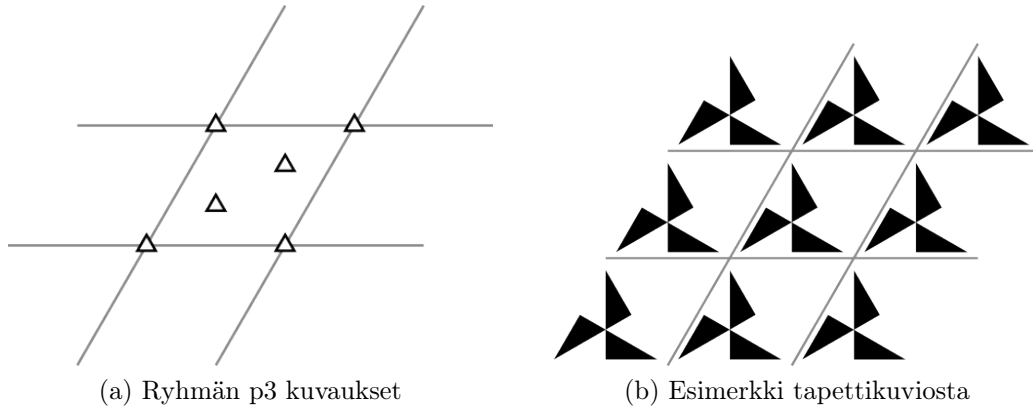
Heksagonaalihilan tapauksessa hilan säilyttävien ortogonaalikuvausten ryhmä on diedri-ryhmä $\langle M_0, R_{\frac{\pi}{3}} \rangle$ ja G on jälleen tämän aliryhmä. Edellä käytyihin tapauksiin päästään, jos G ei sisällä kolmatta tai kuudetta astetta olevia kiertoja.

Olemme valinneet vektorin a siten, että se on vaakasuuntainen. Siirtohila voidaan tällöin jakaa *kannalla seisoviin kolmioihin* ja *kärjellään seisoviin kolmioihin*.

$p3$

Olkoon pisteryhmä $P = \langle R_{\frac{2\pi}{3}} \rangle = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$. Valitaan origoksi kierron $R_{\frac{2\pi}{3}}$ kierto-keskus, jolloin kaikki pisteryhmän kuvaukset kuuluvat tapettiryhmään. Tapettiryhmään kuuluu myös $(R_{\frac{2\pi}{3}}, ma + nb)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$.

Tällaisen kuvauksen kiertokeskus löydetään kun kuvaus kirjoitetaan muodossa $(R_{\frac{2\pi}{3}}, v - R_{\frac{2\pi}{3}}v)$, jossa $v = \frac{m-n}{3}a + \frac{m+2n}{3}b$. Jos $m-n \in 3\mathbb{Z}$, kiertokeskus v sijaitsee jonkin siirtohilan pisteen päällä. Jos $m-n \in 3\mathbb{Z} + 1$, pätee $v = pa + qb + \frac{1}{3}(a+b)$ joillakin $p, q \in \mathbb{Z}$. Tällöin kiertokeskus sijaitsee kannallaan seisovan kolmion keskipisteessä. Jos taas $m-n \in 3\mathbb{Z} + 2$, pätee $v = pa + qb + \frac{2}{3}(a+b)$, jolloin kiertokeskus sijaitsee kärjellään seisovan kolmion keskipisteessä. Vastaavanlaisella päättelyllä nähdään, että kiertojen $(R_{\frac{4\pi}{3}}, ma + nb)$ kiertokeskukset sijaitsevat samoissa pisteissä. Ryhmässä ei ole muita kuvauksia, mikä nähdään kuten ryhmän $p2$ tapauksessakin. Kutsumme tätä ryhmää nimellä $p3$ ja se nähdään kuvassa 4.14.

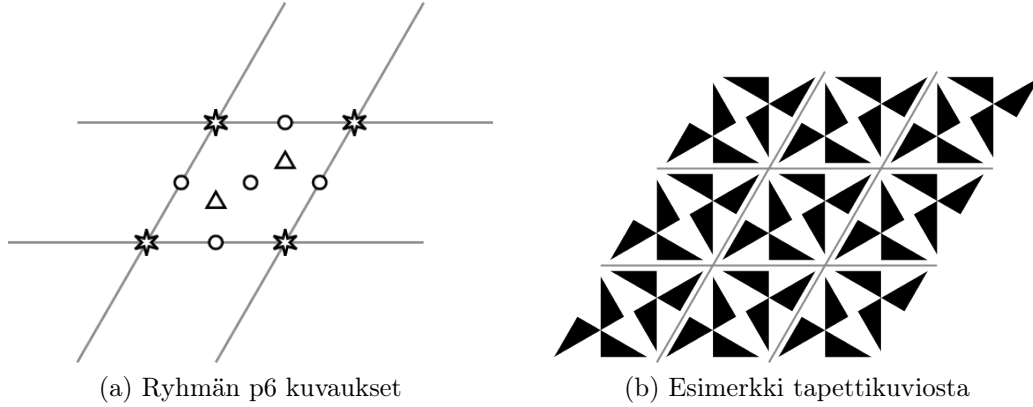


Kuva 4.14: Tapettiryhmä $p3$

p6

Olkoon pisteryhmä $P = \langle R_{\frac{\pi}{3}} \rangle$. Valitaan jälleen origoksi pisteryhmän virittävän kierron $R_{\frac{\pi}{3}}$ kiertokeskus, jolloin kaikki pisteryhmän kuvaukset kuuluvat tapettiryhmään.

Olkoot $m, n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $(R_{\frac{\pi}{3}}, ma + nb) = (R_{\frac{\pi}{3}}, v - R_{\frac{\pi}{3}}v) \in G$, jossa $v = -na + (m+n)b$. Nähdään, että kuudenneskäännösten kiertokeskukset sijaitsevat siirtohilan pisteiden päällä. Samoissa pisteissä on myös kolmanneskiertojen ja puolikiertojen kiertokeskukset, sillä molemmat voidaan esittää kuudenneskiertojen yhdisteinä. Näiden lisäksi tapettiryhmässä on kolmanneskiertojen kiertokeskukset kannallana ja kärjellään seisovien kolmioiden keskipisteissä kuten ryhmällä $p3$. Lopuksi ryhmään kuuluvat vielä puolikierrat $(R_{\pi}, ma + nb) = (R_{\pi}, v - R_{\pi}v)$, jossa $v = \frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb$. Puolikiertojen kiertokeskukset siis sijaitsevat siirtohilan vierekkäisten pisteiden puolessa välissä. Ryhmässä ei ole muita kuvauksia. Todistus on samanlainen kuin ryhmän $p2$ tapauksessa. Ryhmä nähdään kuvassa 4.15. Tämän ryhmän nimi on $p6$.



Kuva 4.15: Tapettiryhmä p6

p31m

Olkoon $P = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}, M_0 \rangle$. Valitaan origoksi peilausten M_0 ja $M_{\frac{2\pi}{3}}$ leikkauspiste, jolloin $(M_0, 0), (M_{\frac{2\pi}{3}}, 0) \in G$. Tällöin myös $(R_{\frac{2\pi}{3}}, 0) = (M_{\frac{2\pi}{3}}, 0) \circ (M_0, 0) \in G$ ja näin ollen kaikki pisteryhmän kuvaukset kuuluvat tapettiryhmään. Tapettiryhmään kuuluvat myös kaikki peilaukset $(M_0, ma + nb) = (M_0, (m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b - a))$. Jos n on parillinen, kyseessä on peilaus, jonka peilausakseli on siirtohilan pisteiden päällä. Jos n on pariton, kuvaus on aito liukupeilaus, jonka akseli on kahden vierekkäisen peilauksen akselien puolessa välissä ja jonka siirron suuruus on $\frac{1}{2}a$. Vastavat tulokset saadaan myös muille peilausakseleille.

Kiertokeskukset ilmenevät kuten ryhmän p3 tapauksessa ja todistukset siitä, että ryhmään ei kuulu muita kuvauksia, etenevät kuten ryhmien p2, pm ja pg tapauksissa. Tämän ryhmän nimi on *p31m*. Kuva 4.16 havainnollistaa, että tämän ryhmän peilausakselit eivät siis leikkaa kaikkien kolmanneskiertojen kiertokeskuksia.

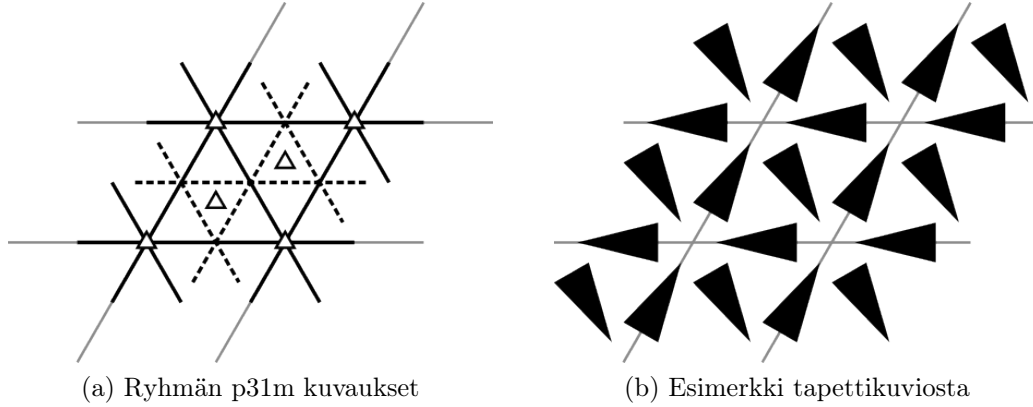
p3m1

Olkoon $P = \langle R_{\frac{2\pi}{3}}, M_{\frac{\pi}{3}} \rangle$. Valitaan origoksi kolmanneskierron kiertokeskus, jolloin kaikki pisteryhmän kierrot kuuluvat tapettiryhmään. Lisäksi $(M_{\frac{\pi}{3}}, \alpha a + \beta b)$ kuuluu tapettiryhmään joillakin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kahden tällaisen liukupeilauksen yhdiste on siirto, joten

$$(M_{\frac{\pi}{3}}, \alpha a + \beta b)^2 = (I, (\alpha + \beta)(a + b))$$

kuuluu tapettiryhmään. Täten $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$. Yhdistetty kuvaus

$$(R_{\frac{2\pi}{3}}, 0) \circ (M_{\frac{\pi}{3}}, \alpha a + \beta b) = (M_{\pi}, \alpha(b - a) - \beta a) = (M_{\pi}, (-\frac{3\alpha}{2} - \beta)a + \frac{\alpha}{2}(2b - a))$$



Kuva 4.16: Tapettiryhmä p31m

on liukupeilaus, sillä $2b - a \perp a$. Kahden tällaisen kuvauksen yhdiste on siirto

$$(M_\pi, (-\frac{3\alpha}{2} - \beta)a + \frac{\alpha}{2}(2b - a))^2 = (I, \alpha(2b - a)),$$

joka myös kuuluu tapettiryhmään. Täten $\alpha \in \mathbb{Z}$ ja näin ollen myös $\beta \in \mathbb{Z}$. Tällöin tapettiryhmään kuuluu myös peilaus

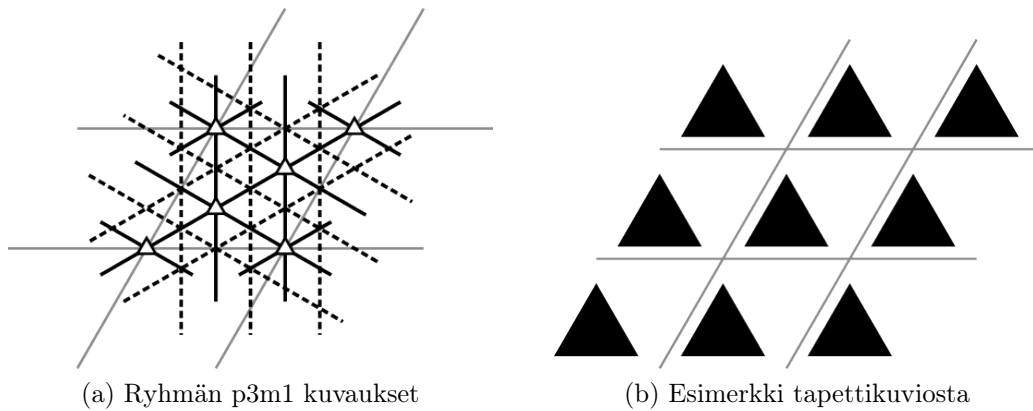
$$(M_{\frac{\pi}{3}}, 0) = (I, -\alpha a - \beta b) \circ (M_{\frac{\pi}{3}}, \alpha a + \beta b).$$

Tapettiryhmään siis kuuluvat kaikki muotoa $(X, ma + nb)$ olevat kuvaukset, jossa $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $X \in P$. Ryhmään ei kuulu muita kuvauksia, mikä osoitetaan kuten ryhmien p2, pm ja pg tapauksissakin. Tämä ryhmä on $p\bar{3}m1$. Kuva 4.17 havainnollistaa, että toisin kuin ryhmässä p31m, tässä ryhmässä kaikki kiertokeskukset ovat peilausakseleiden päällä.

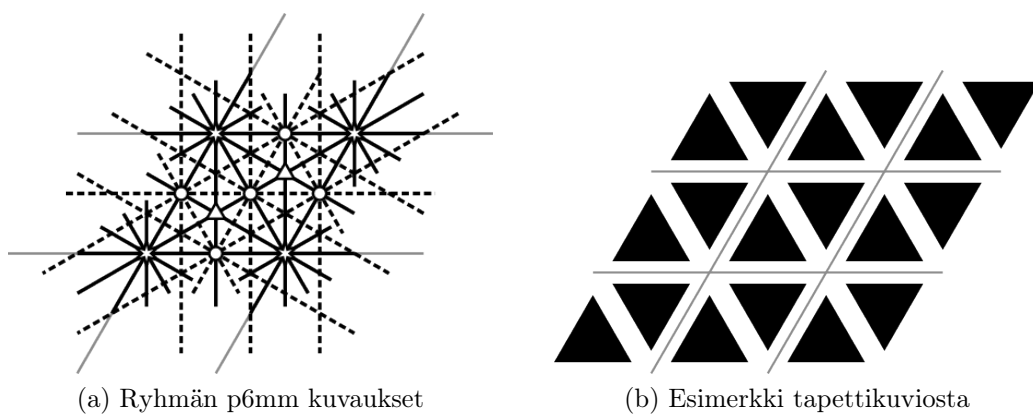
p6mm

Viimeinen ryhmä saadaan, kun $P = \langle R_{\frac{\pi}{3}}, M_0 \rangle$. Valitaan origoksi jälleen peilausten M_0 ja $M_{\frac{\pi}{3}}$ peilausaksien leikkauspiste, jolloin myös kierto $R_{\frac{\pi}{3}}$ kuuluu tapettiryhmään. Täten kaikki kierrot ja näin ollen myös kaikki peilaukset kuuluvat pisteryhmään.

Kiertojen kiertokeskukset sijaitsevat siirtohilan pisteissä $(R_{\frac{\pi}{3}})$, siirtohilan pisteissä ja hilakolmioiden keskipisteissä $(R_{\frac{2\pi}{3}}$ ja $R_{\frac{4\pi}{3}})$ ja siirtohilan pisteissä ja hilakolmioiden kylkien puolella välissä (R_π) . Peilausakselit sijaitsevat hilan pisteiden päällä (peilaukset) tai niiden puolella välissä (liukupeilaukset). Todistukset siitä, että ryhmään ei kuulu muita kuvauksia, etenevät kuten edellisten heksagonaalihilan ryhmien tapauksissa. Kutsumme tätä ryhmää nimellä $p6mm$, ja se nähdään kuvassa 4.6.



Kuva 4.17: Tapettiryhmä $p3m1$



Kuva 4.18: Tapettiryhmä $p6mm$

Luku 5

Uniikit tapettiryhmät

Edellisessä luvussa osoitettiin, että on olemassa korkeintaan seitsemäntoista tapettiryhmää. Tässä luvussa todistetaan, että nämä kaikki ovat todellakin eri ryhmiä, eli mitkään ryhmistä eivät ole isomorfisia. Todistus etenee kuten Armstrongin [1] luvussa 26. Ensimmäiseksi tarvitaan aputulos.

Lemma 5.1. *Isomorfismi tapettiryhmien välillä kuvaa siirtot siirtoiksi, kierrot kierroiksi, peilaukset peilauksiksi ja liukupeilaukset liukupeilauksiksi.*

Todistus. Olkoot G_1 ja G_2 tapettiryhmiä, $g \in G_1$ ja $\gamma: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismi. Käytämme todistuksessa hyväksemme tietoa siitä, että isomorfismi säilyttää ryhmän alkion kertaluvun. Lauseen 2.12 mukaan tapettiryhmien alkiot ovat siirtoja, kiertoja, peilauksia tai liukupeilauksia. Tunnetusti siirtojen kertaluku on ääretön. Korollarin 2.16 mukaan peilausten kertaluku on kaksi ja liukupeilausten kertaluku on ääretön.

Lisäksi korollarin 3.11 mukaan tapettiryhmän kiertojen kertaluku on äärellinen ja tunnetusti kierroista ainoastaan puolikierron kertaluku on kaksi.

Oletetaan ensin, että g on siirto, jolloin kertalukujen perusteella $\gamma(g)$ on joko siirto tai liukupeilaus. Oletetaan, että $\gamma(g)$ on liukupeilaus.

Valitaan sellainen siirto $t \in G_2$, joka ei kommutoi alkion $\gamma(g)$ kanssa. Tällaiseksi käy mikä tahansa siirto, joka ei ole peilausakselin suuntainen. Tällöin myöskään siirto t^2 ei ole peilausakselin suuntainen, joten sekään ei kommutoi alkion $\gamma(g)$ kanssa. Olkoon $h \in G_1$ sellainen, että $\gamma(h) = t$, jolloin h on joko siirto tai liukupeilaus. Tällöin h^2 on siirto, joten se kommutoi siirron g kanssa, sillä kaikki siirrot kommutoivat keskenään. Tämä voidaan ilmaista yhtälöllä $h^2 = gh^2g^{-1}$, joten

$$t^2 = \gamma(h)^2 = \gamma(h^2) = \gamma(gh^2g^{-1}) = \gamma(g)\gamma(h)^2\gamma(g)^{-1} = \gamma(g)t^2\gamma(g)^{-1}.$$

Kertomalla yhtälön molemmat puolet alkiolla $\gamma(g)$, nähdään, että t^2 kommutoi alkion $\gamma(g)$ kanssa. Tämä on ristiriita, joten $\gamma(g)$ on siirto. Isomorfismi siis kuvaa siirrot siirroiksi.

Oletetaan sitten, että g on liukupeilaus. Tällöin $\gamma(g)$ on siirto tai liukupeilaus. Edellisen mukaan isomorfismi kuvaa siirrot siirroiksi, joten myös γ^{-1} kuvaa siirrot siirroiksi. Täten jos $\gamma(g)$ on siirto, myös $\gamma^{-1}(\gamma(g)) = g$ on siirto. Näin ollen alkion $\gamma(g)$ on oltava liukupeilaus.

Oletetaan seuraavaksi, että g on peilaus. Sen kertaluku on kaksi, joten $\gamma(g)$ on joko peilaus tai puolikierto. Oletetaan, että $\gamma(g)$ on puolikierto. Valitaan tällä kertaa siirto $t \in G_1$, joka ei ole kohtisuorassa alkion g peilausakseliin nähden. Tällöin tg on liukupeilaus, jonka kertaluku on ääretön. Kuitenkin $\gamma(tg) = \gamma(t)\gamma(g)$ on siirron ja puolikierron yhdisteenä puolikierto, jonka kertaluku on kaksi. Koska isomorfismi säilyttää kuvausten kertaluvut, tämä on ristiriita, joten $\gamma(g)$ on peilaus.

Oletetaan lopuksi, että g on kierto. Jos sen kertaluku on suurempi kuin kaksi, alkion $\gamma(g)$ kertaluku on myös suurempi kuin kaksi ja näin ollen $\gamma(g)$ on myös kierto. Jos kertaluku on kaksi, alkio $\gamma(g)$ on puolikierto tai peilaus. Jos $\gamma(g)$ on peilaus, edellisen mukaan myös g on peilaus, joten $\gamma(g)$ on puolikierto. \square

Lemma 5.2. *Jos kaksi tapettiryhmää ovat isomorfiset, niiden pisteryhmät ovat isomorfiset.*

Todistus. Olkoot G_1 ja G_2 kaksi tapettiryhmää, joilla on siirtohilat H_1 ja H_2 ja pisteryhmät P_1 ja P_2 . Olkoon lisäksi $\gamma: G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismi. Lemman 5.1 mukaan γ kuvaa siirrot siirroiksi, joten $\gamma(H_1) = H_2$. Olkoon $\gamma': G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$ kuvaus ehdolla $\gamma'(gH_1) = \gamma(g)H_2$. Suoraan määritelmää käyttäen voidaan osoittaa, että γ' on isomorfismi, joten $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$. Lauseen 3.5 mukaan pisteryhmät ovat täten isomorfiset. \square

Lemma 5 antaa meille yksinkertaisen työkalun tutkia isomorfisuutta, sillä sen perusteella kaksi tapettiryhmää eivät voi olla keskenään isomorfisia, mikäli niillä on epäisomorfiset pisteryhmät. Kaikkien seitsemäntoista tapettiryhmän pisteryhmät on koottu taulukkoon 5.

ryhmä	pisteryhmä	isomorfiatyyppe
p1	$\{I\}$	C_1
p2	$\{I, R_\pi\}$	C_2
pm	$\{I, M_0\}$	C_2
pg	$\{I, M_0\}$	C_2
p2mm	$\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$	$C_2 \times C_2$
p2mg	$\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$	$C_2 \times C_2$
p2gg	$\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$	$C_2 \times C_2$
cm	$\{I, M_0\}$	C_2
c2mm	$\{I, R_\pi, M_0, M_\pi\}$	$C_2 \times C_2$
p4	$\langle R_{\frac{\pi}{2}} \rangle$	C_4
p4mm	$\langle R_{\frac{\pi}{2}}, M_0 \rangle$	D_4
p4gm	$\langle R_{\frac{\pi}{2}}, M_0 \rangle$	D_4
p3	$\langle R_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$	C_3
p6	$\langle R_{\frac{\pi}{3}} \rangle$	C_6
p3m1	$\langle R_{\frac{2\pi}{3}}, M_0 \rangle$	D_3
p13m	$\langle R_{\frac{2\pi}{3}}, M_0 \rangle$	D_3
p6mm	$\langle R_{\frac{\pi}{3}}, M_0 \rangle$	D_6

Tunnetusti C_1 ei ole isomorfinen minkään muun syklisen ryhmän tai diedriryhmän kanssa, joten p1 ei ole isometrinen minkään muun tapettiryhmän kanssa. Vastaavasti nähdään, että myöskään p3, p4, p6 ja p6mm eivät ole isomorfisia minkään muun tapettiryhmän kanssa. Jäljelle jää neljä joukkoa tapettiryhmiä, jotka tutkitaan yksi kerrallaan.

Lause 5.3. *Mitkään ryhmistä p2, pm, pg ja cm eivät ole keskenään isomorfiset.*

Todistus. Ryhmässä p2 on kierto, mutta missään muussa näistä ryhmistä ei ole. Täten lemmän 5.1 mukaan p2 ei voi olla isomorfinen minkään ryhmistä pm, pg tai cm kanssa. Jäljelle jäävistä kolmesta ryhmästä pg on ainoa, jossa ei ole aitoja peilauksia. Täten se ei voi olla isomorfinen kummankaan ryhmistä pm tai cm kanssa. Todistaaksemme, että pm ja cm eivät ole isomorfisia, tarkastellaan ryhmän pm mielivaltaista peilausta, joka on muotoa (M_0, mb) , jossa $m \in \mathbb{Z}$ ja b on nelikulmion pystysuora vektori. Se voidaan jakaa siirto- ja peilauskomponentteihin (I, mb) ja $(M_0, 0)$, jotka molemmat kuuluvat ryhmään pm. Ryhmästä cm löytyy kuitenkin kuvaus $(M_0, -\frac{1}{2}a) = (I, -\frac{1}{2}a) \circ (M_0, 0)$, jonka siirtokomponentti ei kuulu ryhmään cm. Täten pm ja cm eivät ole isomorfiset. \square

Lause 5.4. *Mitkään ryhmistä p2mm, p2mg, p2gg ja c2mm eivät ole keskenään isomorfiset.*

Todistus. Ryhmässä p2gg ei ole peilauksia, joten lemmän 5.1 mukaan se ei voi olla isomorfinen minkään muun ryhmistä kanssa. Vastaavasti ryhmässä p2mm ei ole liukupeilauksia, joten se ei voi olla isomorfinen minkään muun ryhmistä kanssa.

Ryhmän $p2mg$ kaikkien aitojen peilausten akselit ovat yhdensuuntaisia, joten kahden peilauksen yhdiste on aina siirto. Sen sijaan ryhmässä $c2mm$ on sekä pysty- että vaakasuuntaisia aitoja peilausakseleita, joten kahden peilauksen yhdiste voi olla puolikierto. Täten myöskään ryhmät $p2mg$ ja $c2mm$ eivät voi olla keskenään isomorfiset. \square

Lause 5.5. *Ryhmät $p4mm$ ja $p4mg$ eivät ole isomorfisia.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että kaikki ryhmän $p4mm$ kierrot, joiden kertaluku on neljä, voidaan ilmaista kahden peilauksen yhdisteenä. Näytetään sitten, että näin ei ole ryhmän $p4mg$ tapauksessa. Tämä riittää todistamaan, että ryhmät eivät ole isomorfiset.

Olkoon φ mielivaltainen ryhmän $p4mm$ kierto, jonka kertaluku on neljä. Tällöin joko $\varphi = (R_{\frac{\pi}{2}}, v - R_{\frac{\pi}{2}}v)$ tai $\varphi = (R_{\frac{3\pi}{2}}, v - R_{\frac{3\pi}{2}}v)$, jossa v on kiertokeskus. Ryhmä $p4mm$ sisältää peilaukset $(M_0, 2nb)$, $(M_\pi, 2ma)$ ja $(M_{\frac{\pi}{2}}, (m-n)(a-b))$ ja ryhmän esittelyssä nähtiin, että aitojen peilausten akselit kulkevat pisteen neljänneksikäntöjen kiertokeskusten kautta. Siirretään origo kiertokeskukseen, jolloin $(R_{\frac{\pi}{2}}, 0) = (M_\pi, 0) \circ (M_{\frac{\pi}{2}}, 0)$ ja $(R_{\frac{3\pi}{2}}, 0) = (M_0, 0) \circ (M_{\frac{\pi}{2}}, 0)$. Havaitaan siis, että kaikki ryhmän $p4mm$ kierrot, joiden kertaluku on neljä, voidaan ilmaista kahden ryhmään kuuluvan peilauksen yhdisteenä.

Osoitetaan, että näin ei ole ryhmän $p4gm$ tapauksessa. Tämän ryhmän aidot peilaukset ovat muotoa $(M_{\frac{\pi}{2}}, \frac{p}{2}(a-b))$ tai $(M_{\frac{3\pi}{2}}, \frac{q}{2}(a+b))$, jossa p ja q ovat parittomia kokonaislukuja. Kahden tällaisen peilausten yhdiste on joko siirto tai puolikierto. Täten esimerkiksi ryhmään $p4gm$ kuuluvaa kuvausta $(R_{\frac{\pi}{2}}, 0)$, jonka kertaluku on neljä, ei voida esittää kahden peilauksen yhdisteenä. \square

Lause 5.6. *Ryhmät $p3m1$ ja $p13m$ eivät ole isomorfisia.*

Todistus. Käytetään samaa tekniikkaa kuin edellisessä todistuksessa ja osoitetaan, että ryhmän $p3m1$ kaikki kierrot, joiden kertaluku on kolme, voidaan esittää yhdisteenä kahdesta ryhmän $p3m1$ peilauksesta. Näytetään vastaesimerkillä, että näin ei ole ryhmän $p31m$ tapauksessa.

Olkoon φ ryhmän $p31m$ kierto, jonka kertaluku on kolme. Ryhmän esittelyssä nähtiin, että tällaisen kierron keskus on joko kärjellään seisovan kolmion keskipisteessä, kannallaan seisovan kolmion keskipisteessä tai siirtohilan pisteen päällä. Lisäksi nähtiin, että kaikissa näistä pisteistä on kolmen peilausakselin leikkauspiste. Lauseen 2.13 mukaan näistä voidaan muodostaa mikä tahansa kierto, jonka kertaluku on kolme.

Osoitetaan, että ryhmän $p3m1$ on kiertoa $(R_{\frac{3\pi}{2}}, a)$, jonka kertaluku on kolme, ei voida esittää kahden peilauksen yhdisteenä. Lauseen 2.13 mukaan kahden peilauksen yhdistetty kuvaus on kierto, jonka keskuksena on peilausakselien leikkauspiste. Ryhmässä $p3m1$ peilausakselit leikkaavat vain siirtohilan pisteissä, mutta kierron $(R_{\frac{3\pi}{2}}, a)$ kiertokeskus on $\frac{1}{3}(a+b)$, joten tätä kiertoa ei voida esittää kahden peilauksen yhdisteenä. \square

Olemme nyt vieneet todistuksen menestyksekkäästi päätepisteeseen. Tarkoituksenamme oli näyttää, että tapettiryhmiä on seitsemäntoista erilaista. Aloitimme tutustumalla luvussa 2 peruskäsitteisiin. Luvussa 3 määrittelimme formaalisti tapettiryhmät ja osoitimme, että jokaisella tapettiryhmällä on siirtohila, joka voi olla yhtä viidestä eri tyypistä. Luvussa 4 todistimme, että tapettiryhmiä korkeintaan seitsemäntoista kappaletta. Lisäksi esittelimme ja nimesimme nämä tapettiryhmät. Tässä luvussa olemme osoittaneet, että mitkään näistä seitsemästätoista tapettiryhmästä eivät ole keskenään isomorfiset, joten voimme todeta, että tapettiryhmiä on tasan seitsemäntoista kappaletta.

Kirjallisuutta

- [1] M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1988
- [2] P.J. Morandi, *The Classification of Wallpaper Patterns: From Group Cohomology to Escher's Tessellations*, New Mexico State University, <http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/Wallpaper.pdf> 2003. Viitattu 25.11.2016.
- [3] A. Baker, *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*, Springer-Verlag, London, 2nd printing, 2003.
- [4] W.A. Adkins, S.H. Weintraub, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [5] D.E. Joyce, *Wallpaper Groups*, <http://www2.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/> 1997. Viitattu 25.11.2016.
- [6] R.F.V. Anderson *Introduction to Linear Algebra*, Holt, Rinehart and Winston of Canada, 1986.
- [7] J.A. Wolf *Spaces of Constant Curvature*, 6th Edition, AMS Chelsea Publishing, 2011.
- [8] J. Väisälä *Topologia I*, 4. painos, Limes Ry, 2007.